TEORI ANTRIAN

PROGRAM STUDI INFORMATIKA
UNIVERSITAS INDRAPRASTA PGRI

Pendahuluan

- Teori antrian pertama kali diciptakan oleh A.K. Erlang seorang ahli matematik Denmark pada tahun 1909. Sejak itu penggunaan model antrian mengalami perkembangan yang cukup pesat terutama setelah berakhirnya perang dunia ke-II.
- Model-model antrian pada dasarnya merupakan aplikasi dari teori probabilitas dan proses stokastik.
- Tujuan utama pemecahan model adalah menentukan karakteristik-karakteristik yang mengukur kinerja sistem sehingga sistem pelayanan dapat bekerja secara optimal.
- Berbagai struktur model antrian yang telah diakui, karakteristik model antrian, dan contoh aplikasi dalam menentukan jumlah kasir bank untuk mengurangi waktu tunggu para pelanggan.

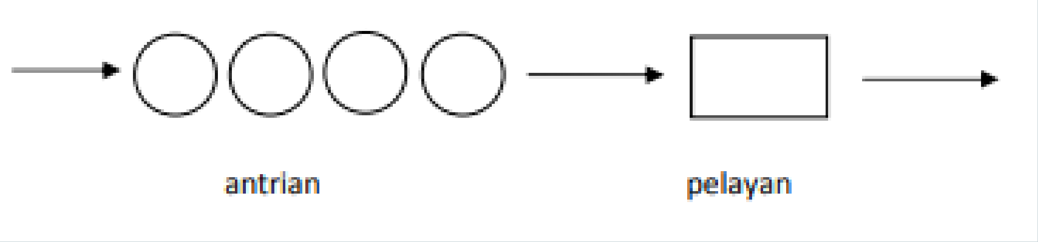
Model Antrian

- Ketika para pelanggan (konsumen) menunggu untuk mendapatkan jasa pelayanan, maka keberadaan sistem antrian sangat diperlukan.
- Beberapa contoh berikut ini menunjukkan bahwa penggunaan sistem antrian sangat membantu dalam melancarkan pelayanan kepada pelanggan atau konsumen seperti:
  - Pelanggan menunggu pelayanan di depan kasir.
  - Mahasiswa menunggu untuk konsultasi dengan dosen pembimbing akademik.
  - Mahasiswa menunggu untuk registrasi dan pembayaran uang kuliah.
  - Para penumpang kereta api menunggu pelayanan loket penjualan karcis.
  - Para pengendara kendaraan menunggu untuk mendapatkan pelayanan pengisian bahan bakar.
  - Pelanggan menunggu pelayanan di Kentucky Fried Chicken.
  - Pesawat terbang menunggu pelayanan menara pengawas untuk melakukan landing maupun take up.

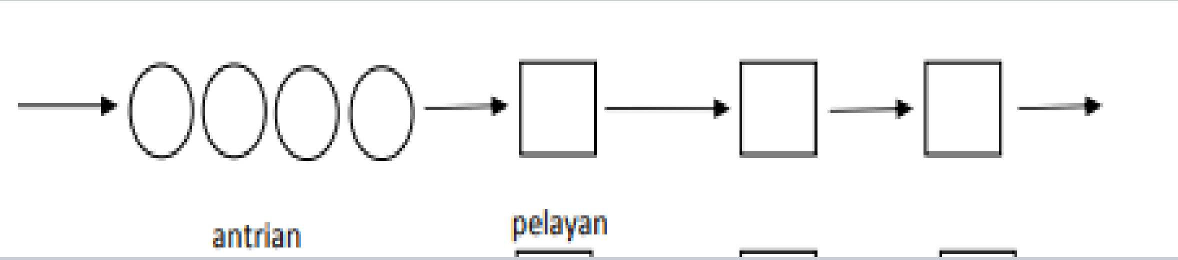
Struktur Dasar Proses Antrian

- Single Channel Single Phase
- Single Channel Multiple Phase
- Multiple Channel Single Phase
- Multiple Channel Multiple Phase

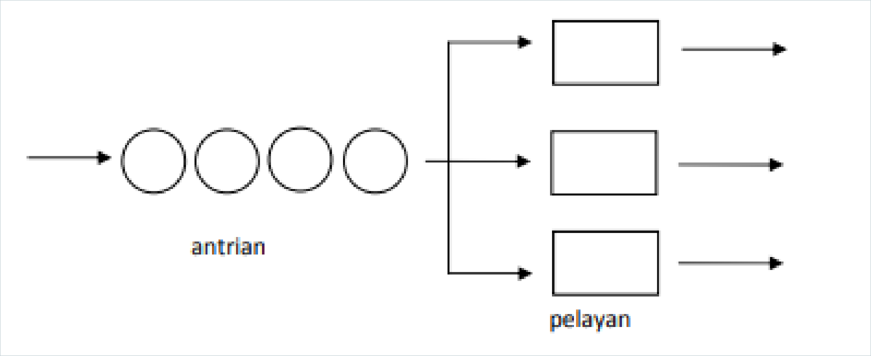
Single Channel Single Phase



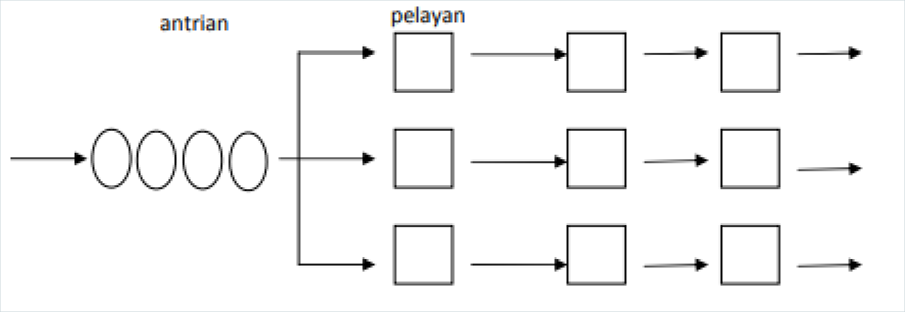
Single Channel Multiple Phase



Multiple Channel Single Phase



Multiple Channel Multiple Phase



Model Antrian

Prosedur umum dalam mengerjakan teknik antrian:

- **Langkah 1**. Tentukan sistem antrian apa yang harus dipelajari.

- **Langkah 2**. Tentukan model antrian yang cocok 'dalam menggambarkan sistem. Dalam kasus pompa bensin paling sedikit ada tiga model yang dapat digunakan yaitu:
  - A. Tiga pompa untuk premium, satu garis tunggu,
  - B. Tiga pompa untuk premium , masing-masing memiliki garis tunggu,
  - C. Satu pompa untuk premium, satu pompa untuk premix, dan satu pompa untuk solar dengan masing-masing memiliki garis tunggu.

- **Langkah 3**. Gunakan formula matematik atau metode simulasi untuk menganalisa model antrian.

Struktur Sistem Antrian

Gambar 13.1 adalah struktur umum model antrian yang memiliki dua komponen utama:

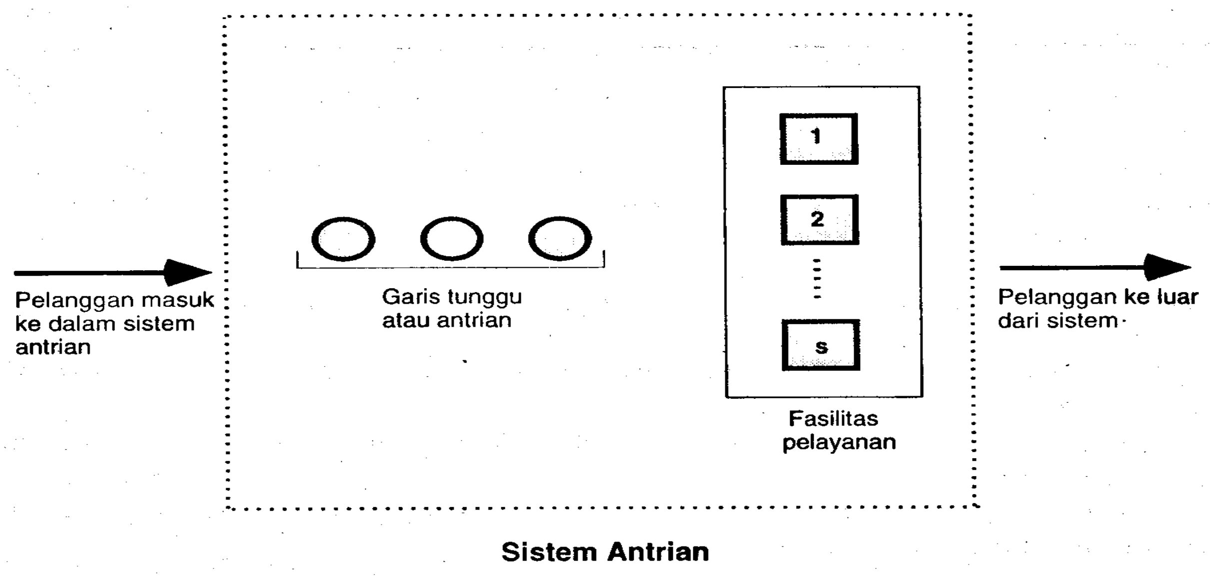
(1) Garis tunggu atau sering disebut antrian (queue).

(2) Fasilitas pelayanan (service "facility).

Pelanggan atau konsumen menunggu untuk mendapatkan jasa pelayanan.

- Komponen dalam Sistem Antrian

1. Populasi masukan (input population).
2. Distribusi kedatangan
3. Disiplin pelayanan
4. Fasilitas Pelayanan
5. Distribusi Pelayanan
6. Kapasitas Pelayanan



Gambar 13.1. *Struktur Sistem Antrian*

Notasi dalam sistem Antrian

- n = Jumlah pelanggan dalam sistem. ‘
- Pn = Probabilitas kepastian n pelanggan dalam sistem.
- λ = Jumlah rata-rata pelanggan yang datang per satuan waktu.
- μ = Jumlah rata-rata pelanggan yang dilayani per satuan waktu.
- p_o = Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem.
- P = Tingkat intensitas fasilitas pelayanan.
- L = Jumlah rata-rata pelangan yang diharapkan dalam sistem.
- Lq = Jumlah pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian.
- W = Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem.
- Wq = Waktu yang diharapkan pelanggan selama menunggu dalam antrian.
- $1/\mu$ = Waktu rata-rata pelayanan.
- 1A = Waktu rata-rata antar kedatangan.
- s = Jumlah fasilitas pelayanan.

Notasi dalam Sistem Antrian

Persamaan yang digunakan dalam sistem (M/M/1) dapat dilihat sebagai berikut:

1. $p = \frac{\lambda}{\mu}$ = Tingkat intensitas fasilitas pelayanan. (13-1a)

2. $p_n = p^n(1 - p)$ = Probabilitas kepastian n pelanggan dalam sistem. (13-1b)

3. $L = \frac{p}{1-p} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ Jumlah rata-rata pelangan yang diharapkan dalam sistem. (13-1c)

4. $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{p^2}{1 - p}$ Jumlah pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian. (13-1d)

5. $W = \frac{1}{\mu - \lambda}$ Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem. (13-1e)

6. $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ Waktu yang diharapkan pelanggan selama menunggu dalam antrian. (13-1f)

SINGLE CHANNEL MODEL

- **Contoh *Model (M/M/1)***
  - *Kasus Pompa Bensin (SPBU)*
    - PT SGT mengoperasikan satu buah pompa bensin dengan satu orang operator yang bernama John, Rata-rata tingkat kedatangan kendaraan mengikuti distribusi poisson yaitu 20 kendaraan/mobil per jam. John dapat melayani rata-rata 25 mobil per jam. Hitunglah soal-soal berikut ini untuk John.
      - Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan (p).
      - Jumlah rata-rata kendaraan yang diharapkan dalam sistem.
      - Jumlah kendaraan yang diharapkan menunggu dalam antrian.
      - Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan selama dalam sistem (menunggu pelayanan).
      - Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan untuk menunggu dalam antrian.

SINGLE CHANNEL MODEL

- Dari kasus ***SPBU***, diketahui $\lambda = 20$ dan $\mu = 25$
- Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan atau p

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0{,}80$$

- Angka tersebut menunjukkan bahwa John akan sibuk melayani mobil selama 80% dari waktunya. Sedangkan 20% dari waktunya atau (1 - p) atau (1 - 0,80) yang sering disebut idle time akan digunakan John untuk istirahat, membersihkan pompa dan lain-lain.

2. $$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{25 - 20} = 4,\ \text{atau}$$

$$L = \frac{p}{1 - p} = \frac{0{,}80}{1 - 0{,}80} = 4 \text{ (lihat persamaan 13-1c)}$$

- Angka 4 menunjukkan bahwa John dapat mengharapkan 4 mobil yang berada dalam sistem.

SINGLE CHANNEL MODEL

3. $$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{(20)^2}{25(25-20)} = \frac{400}{125} = 3{,}20.$$

- Angka tersebut menunjukkan bahwa, mobil yang menunggu untuk dilayan dalam antrian sebanyak 3,20 kendaraan.

4. $$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{25 - 20} = \frac{1}{5} = 0{,}20 \text{ jam atau 12 menit.}$$

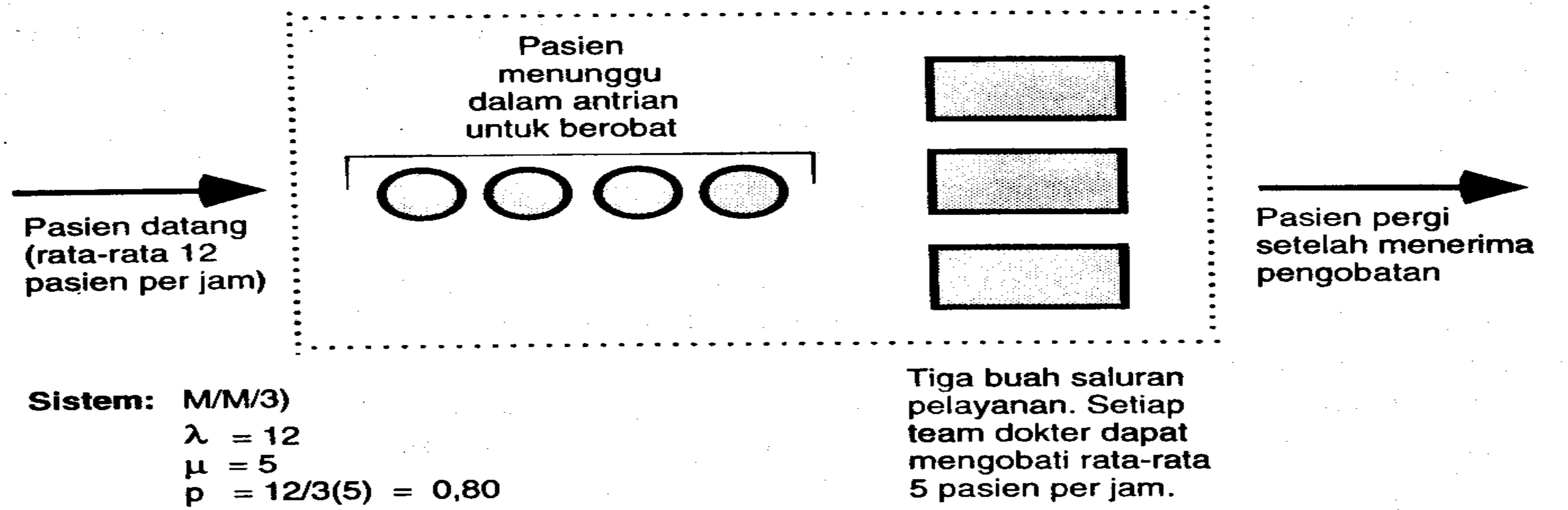
- Angka tersebut menunjukkan bahwa, waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam sistem selama 12 menit.

5. $$W_q = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{20}{25(25-20)} = \frac{20}{125} = 0{,}16 \text{ jam atau 9,6 menit.}$$

- Angka tersebut menunjukkan bahwa, waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam antrian selama 9,6 menit.

Model Antrian Multi Chanel

- Sebuah rumah sakit memiliki sebuah ruang gawat darurat (RGD) yang berisi tiga bagian ruangan yang terpisah untuk setiap kedatangan pasien. Setiap ruangan memiliki satu orang dokter dan satu orang jururawat. Secara rata-rata seorang dokter dan jururawat dapat merawat 5 orang pasien per jam. Apabila pasien yang dihadapi hanya luka-luka ringan, mereka dapat melayani rata-rata 12 pasien per jam.



Gambar 13.5. *Model Unit Gawat Darurat (UGD)*

Model Antrian

Dasar yang digunakan dalam multiple-channel model adalah sistem (M/M/s). Perbedaannya dengan single-channel model adalah terletak pada jumlah fasilitas pelayanan. Dalam multiple-channel model, fasilitas pelayanan yang dimiliki lebih dari satu. Huruf (s) yang terdapat dalam sistem (M/M/s) menyatakan jumlah fasilitas pelayanan.

$$P_o = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\,\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)} \right\}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} (P_o), \text{ jika } 0 \le n \le s \\ \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!\, s^{n-s}} (P_o), \text{ jika } n \ge s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_o \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p}{s!\,(1-p)^2}$$

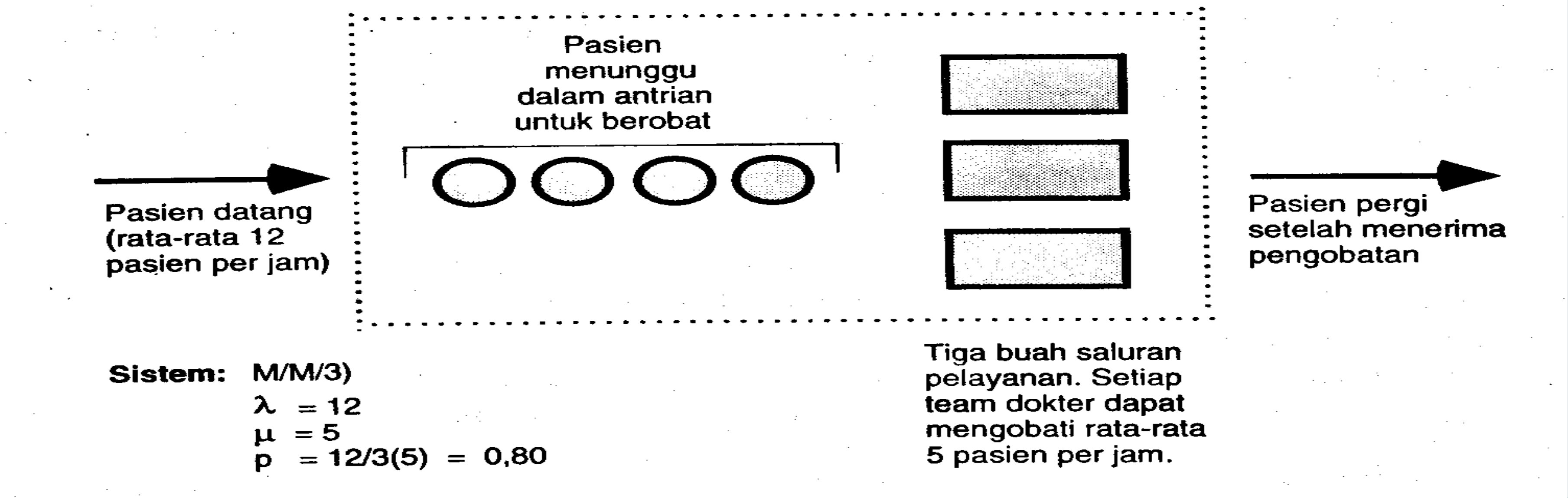
$$L = \lambda W = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Model Antrian Multi Chanel

- Sebuah rumah sakit memiliki sebuah ruang gawat darurat (RGD) yang berisi tiga bagian ruangan yang terpisah untuk setiap kedatangan pasien. Setiap ruangan memiliki satu orang dokter dan satu orang jururawat. Secara rata-rata seorang dokter dan jururawat dapat merawat 5 orang pasien per jam. Apabila pasien yang dihadapi hanya luka-luka ringan, mereka dapat melayani rata-rata 12 pasien per jam.



Gambar 13.5. *Model Unit Gawat Darurat (UGD)*

Model Antrian Multi Chanel

$$p = \frac{\lambda}{\mu s}$$

Jika, $\lambda = 12$

$\mu = 5$

$s = 3$

$$p = \frac{12}{(5)(3)} = \frac{12}{15} = 0{,}80$$

$$L_q = \frac{p_o \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p}{s!\,(1-p)^2}$$

$$L_q = \frac{0{,}20 \left(\frac{12}{5}\right)^3 \left(\frac{12}{15}\right)}{3!\,\left(1 - \frac{12}{15}\right)^2}$$

$$= \frac{0{,}20(13{,}824)(0{,}80)}{6(0{,}04)}$$

$$= \frac{2{,}21184}{0{,}24}$$

$= 9{,}216$ pasien.

Model Antrian Multi Chanel

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{9{,}216}{12} = 0{,}768 \text{ jam atau } 46 \text{ menit}$$

Rata-rata pasien menunggu antrian selama 0,768*60 = 46 menit

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0{,}768 + \frac{1}{5} = 0{,}968 \text{ jam atau } 58 \text{ menit}$$

Pasien menunggu dalam sistem selama 0,968*60 = 58 menit

$$L = \lambda W = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \lambda W = 12(0{,}968) = 11{,}62.$$

Pihak rumah sakit mengharapkan 12 pasien berada di sistem