

PERTEMUAN 13

- PENYEDERHANAAN DENGAN KARNAUGH MAP
- MINIMASI

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN SECARA ALJABAR

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN SECARA ALJABAR

Jumlah literal dalam sebuah fungsi aljabar Boolean dapat diminimumkan dengan dua metode yaitu :

1. Penyederhanaan Fungsi Boolean secara aljabar
2. Penyederhanaan Dengan Peta Karnaugh (K-Map)

1. Penyederhanaan Fungsi Boolean secara hukum aljabar

Hukum-hukum dan Teori Aljabar Boole

Hukum Identitas	$A + 0 = A$	$A \times 1 = A$
Hukum Idempoten	$A + A = A$	$A \times A = A$
Hukum Komplemen	$A + \bar{A} = 1$	$A \times \bar{A} = 0$
Hukum Dominansi	$A + 1 = 1$	$A \times 0 = 0$
Hukum Involusi	$\bar{\bar{A}} = A$	
Hukum Komutatif	$A + B + C = C + B + A$	$A \times B \times C = C \times B \times A$
Hukum Asosiatif	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
Hukum Distributif	$A(B + C) = AB + AC$	$A + (B \times C) = (A + B)(A + C)$

PENYEDERHANAAN DENGAN KARNAUGH MAP (K-MAP) DAN MINIMASI

2. PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN DENGAN PETA KARNAUGH (K-MAP)

- Ditemukan oleh Maurice Karnaugh tahun 1953 dengan metode grafis, yaitu dengan mengelompokkan pasangan angka 1 yang saling berdekatan.
- Dua kotak berdekatan (pair), empat kotak (Quad) atau delapan kotak berdekatan (oktat)
- Untuk dapat melakukan minimisasi peta Karnaugh sebaiknya pemahaman tentang pengisian nilai-nilai SOP dan POS pada Karnaugh dipahami terlebih dahulu. Pengelompokkan dimungkinkan untuk keadaan 2, 4 dan 8 berdampingan.

Metode Penempatan SOP dan POS pada peta Karnaugh

Peta Karnaugh untuk 2 variable (Jumlah kotak 2^n , n variable maka $2^2 = 4$)

		B	
		0	1
A	0	$\bar{A}\bar{B}$ 0	$\bar{A}B$ 1
	1	$A\bar{B}$ 2	AB 3



Nilai Pada K-Map

$$\bar{A}\bar{B} = 00 = 0$$

$$\bar{A}B = 01 = 1$$

$$A\bar{B} = 10 = 2$$

$$AB = 11 = 3$$

Contoh 2 :

$$f(A,B,C) = \overline{A}\overline{B} + AB \longrightarrow \begin{array}{l} 10 \longrightarrow A = 1; \overline{B} = 0 \\ \overline{A}\overline{B} = 10 = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 11 \longrightarrow A = 1; B = 1 \\ \overline{A}B = 11 = 3 \end{array}$$

$\overline{A}\overline{B}$ dalam biner 10 penempatan pada karnaugh baris $A = 1$, kolom $B = 0$
 AB dalam biner 11 penempatan pada karnaugh baris $A = 1$, kolom $B = 1$ } SOP diberi angka 1

Menjadi sebagai berikut :

		B	
		0	1
A	0	0	0
	1	1	1

→ POS diberi angka 0 (Selain letak SOP)
→ SOP diberi angka 1

Baris 2 kolom 1 dan baris 2 kolom 2 diisikan dengan 1 karena fungsi merupakan bentuk SOP.

Untuk mendapatkan fungsi POS didapat dari nilai 0 yaitu : $\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$ (Selain letak SOP)

$$\begin{aligned} \text{POS} &= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B \\ &= \overline{A}(\overline{B} + B) \\ &= (A + B).(A + \overline{B}) \end{aligned}$$

- Peta karnaugh untuk 3 variable (Jumlah kotak 2^n , $n = \text{variable}$ maka $2^3 = 8$)

		BC			
		00	01	11	10
A	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 0	$\bar{A}\bar{B}C$ 1	$\bar{A}B\bar{C}$ 3	$\bar{A}BC$ 2
	1	$A\bar{B}\bar{C}$ 4	$A\bar{B}C$ 5	$AB\bar{C}$ 7	ABC 6



Dalam SOP letaknya diberi angka 1

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} = 000 = 0$$

$$\bar{A}\bar{B}C = 001 = 1$$

$$\bar{A}B\bar{C} = 010 = 2$$

$$\bar{A}BC = 011 = 3$$

$$A\bar{B}\bar{C} = 100 = 4$$

$$A\bar{B}C = 101 = 5$$

$$AB\bar{C} = 110 = 6$$

$$ABC = 111 = 7$$

Contoh 3 :

$$f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

$\overline{A}B\overline{C}$ dalam biner 010 penempatan pada karnaugh baris $A = 0$, kolom $BC = 10 = 2$

$A\overline{B}\overline{C}$ dalam biner 110 penempatan pada karnaugh baris $A = 1$, kolom $BC = 10 = 6$

ABC dalam biner 111 penempatan pada karnaugh baris $A = 1$, kolom $BC = 11 = 7$

} Diberi angka 1 = SOP

Menjadi sebagai berikut :

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	1

Baris 1 kolom 4, baris 2 kolom 3 dan baris 2 kolom 4 diisikan dengan 1 karena fungsi merupakan bentuk SOP. Untuk mendapatkan fungsi POS didapat dari nilai 0 yaitu : $\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$

$$\text{POS} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

$$= \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

$$= (A + B + C) + (A + B + \overline{C}) (A + \overline{B} + \overline{C}) (\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$$

- Peta karnaugh untuk 4 variable (Jumlah kotak 2^n , $n = \text{variable}$ maka $2^4 = 16$)

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ 1	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ 3	$\bar{A}\bar{B}CD$ 2
	01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ 4	$\bar{A}B\bar{C}D$ 5	$\bar{A}BC\bar{D}$ 7	$\bar{A}BCD$ 6
	11	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 12	$A\bar{B}\bar{C}D$ 13	$AB\bar{C}\bar{D}$ 15	$AB\bar{C}D$ 14
	10	$AB\bar{C}\bar{D}$ 8	$AB\bar{C}D$ 9	$ABC\bar{D}$ 11	$ABCD$ 10

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} = 0000 = 0$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D = 1000 = 8$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D = 0001 = 1$$

$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D} = 1001 = 9$$

$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D} = 0010 = 2$$

$$\bar{A}\bar{B}CD = 1010 = 10$$

$$\bar{A}\bar{B}CD = 0011 = 3$$

$$\bar{A}B\bar{C}\bar{D} = 1011 = 11$$

$$\bar{A}B\bar{C}\bar{D} = 0100 = 4$$

$$AB\bar{C}\bar{D} = 1100 = 12$$

$$\bar{A}B\bar{C}D = 0101 = 5$$

$$AB\bar{C}D = 1101 = 13$$

$$\bar{A}BC\bar{D} = 0110 = 6$$

$$ABC\bar{D} = 1110 = 14$$

$$\bar{A}BCD = 0111 = 7$$

$$ABCD = 1111 = 15$$

PENGGULUNGAN

- Teknik ini digunakan melakukan pengelompokkan ketika ditemukan letak posisi angka 1 berada pada sisi yang bersebrangan (sisi kiri dengan sisi kanan dan sisi atas dengan bawah).
- Kotak yang berada pada sisi bersebrangan dianggap bertetangga juga dengan cara menautkan atau melakukan penggulungan.
- Semakin banyak terbentuknya kelompok angka satu maka semakin banyak suku (term) yang terbentuk. Semakin banyak suku maka persamaan semakin tidak sederhana.
- Bila ditemukan sebuah kelompok dapat terbentuk dengan 2 atau 4 pasangan dalam satu peta maka pilihlah pasangan dengan jumlah terbesar yaitu 4.

MINIMISASI FUNGSI BOOLEAN DENGAN PETA KARNAUGH

- Minimisasi dilakukan dengan cara melingkari kelompok angka 1 berdekatan yang berpasangan 2,4, atau 8 pasang.
- Kemudian lakukan peninjauan terhadap baris dan kolom pada masing-masing pasangan tersebut untuk mengambil posisi nilai yang sama atau menghilangkan nilai yang sama

• Contoh 4 :

Sederhanakan fungsi berikut $f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$ dengan metode :

- a. K-map
- b. Hukum Aljabar

Jawab :

a. K-map

Perhatikan nilai kesamaan terhadap AB dan CD untuk masing-masing kelompok

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} = \overline{A}\overline{C}\overline{D} + A\overline{C}\overline{D}$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	0
	01	1	0	0	0
	11	0	0	0	1
	10	0	0	0	1

Lingk 1 : - ditarik terhadap CD kelompok angka sama pada posisi \overline{CD}

- ditarik terhadap AB kelompok angka sama pada posisi \overline{A}

Maka lingkaran 1 bernilai $\overline{A}\overline{C}\overline{D}$

Lingk 2 : - ditarik terhadap CD kelompok angka sama pada posisi $C\overline{D}$

- ditarik terhadap AB kelompok angka sama pada posisi A

Maka lingkaran 1 bernilai $A\overline{C}\overline{D}$

b. Dengan hukum aljabar

$$f(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$$

$$= \overline{A}\overline{C}\overline{D} (B + \overline{B}) + A\overline{C}\overline{D} (B + \overline{B}) \quad \text{Hukum distributif}$$

$$= \overline{A}\overline{C}\overline{D} \cdot 1 + A\overline{C}\overline{D} \cdot 1 \quad \text{Hukum komplemen}$$

$$= \overline{A}\overline{C}\overline{D} + A\overline{C}\overline{D}$$

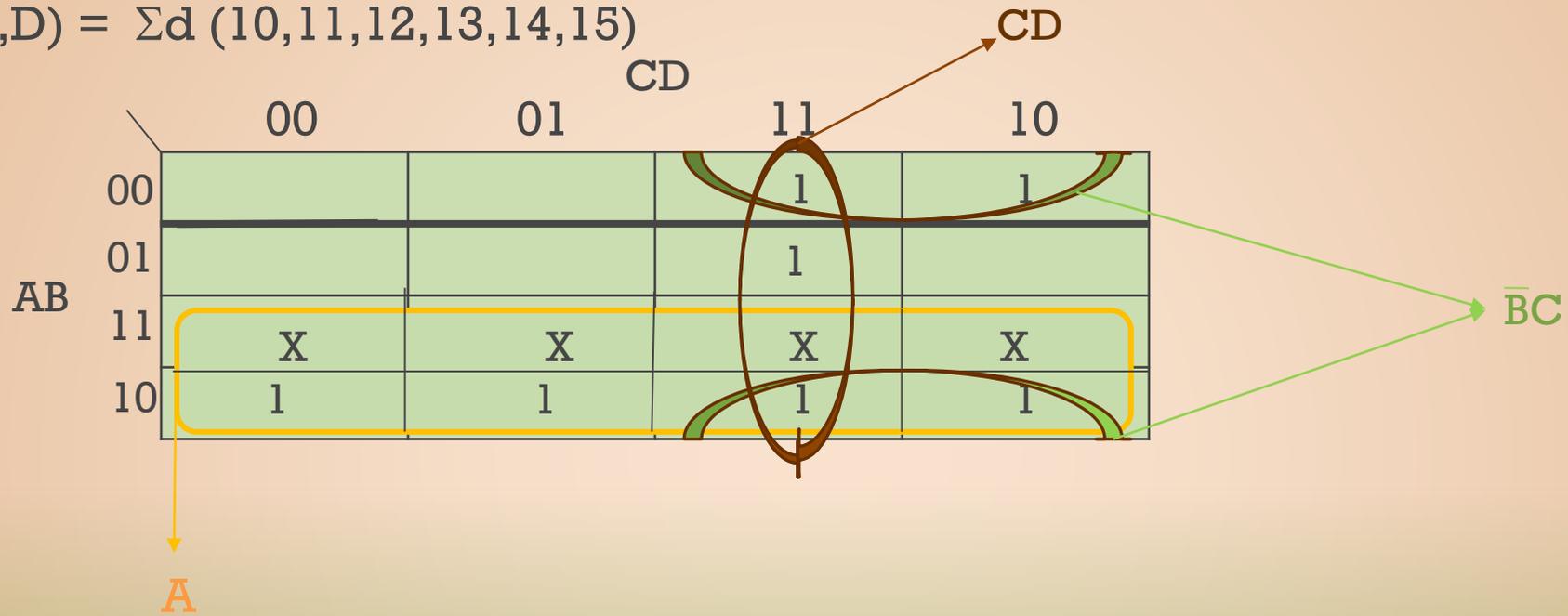
KEADAAN DON'T CARE

- Representasi angka-angka don't care pada K-map dilakukan dengan memberikan tanda silang yang diartikan bahwa dapat dipergunakan untuk nilai 0 atau 1.
- Digunakan untuk membantu agar mendapat hasil yang lebih sederhana.

• Contoh 6 :

Sederhanakan persamaan Boole $f(A,B,C,D) = \sum m (2,3,7,8,9,10,11)$ dengan keadaan don't care

$$f(A,B,C,D) = \sum d (10,11,12,13,14,15)$$



Bentuk SOP dari peta tersebut adalah $f(A,B,C) = A + \bar{B}C + CD$

Latihan Soal :

1. Tuliskan bentuk SOP dan POS dari fungsi berikut:

a. $\Pi(0,2,4,5)$

b. $f(A,B,C) = \overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}C$

2. Nyatakan persamaan fungsi-fungsi boole dibawah ini kedalam rangkaian gerbang logika:

a. $\overline{A}B + \overline{B}C + CD$

b. $\overline{A}B \cdot (A+C)$

c. $\overline{A}B + \overline{A}\overline{B}$

3. Sederhanakan persamaan Boole berikut ini dengan menggunakan Hukum aljabar Boolean

a. $\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB$

b. Implementasikan persamaan diatas dengan menggunakan rangkaian gerbang logika

4. Sederhanakan persamaan Boole berikut ini dengan menggunakan peta Karnaugh

a. $f(A,B,C) = ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$

5. Sederhanakan maksterm dan minterm berikut dengan menggunakan peta Karnaugh

a. $\pi M = (1,3,5,7,9,11,13,15)$

b. $\Sigma m = (0,4,6,8,9,10,11,15)$

REFERENSI

- Pernanting Tarigan. (2012). Dasar Teknik Digital. Nuansa Aulia.
- Rinaldi Munir. (2005). Matematika Diskrit Edisi 3. Informatika
- Ganti Depari. (2012). Teori dan Aplikasi Teknik Digital. Nuansa Aulia.