PERTEMUAN 4

KALKULUS DASAR

Program Studi Informatika
Universitas Indraprasta PGRI

LIMIT FUNGSI ALJABAR

Teorema limit

$$1.\lim_{x\to a} c = c$$

$$2.\lim_{x\to a} k.f(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$$

$$3.\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\pm\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$$

$$4.\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right].\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]$$

$$5.\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$6.\lim_{x\to a}(f(x))^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

$$7.\lim_{x\to a}\ln\left(f(x)\right) = \ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

$$8.\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$9.\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Ketentuan Penyelesaian Soal Limit

- Jika f(x) bukan bentuk tak tentu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to 2} \left(2x^2 - 2\right) = 2(2)^2 - 2 = 6$$

- Jika f(x) merupakan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

  Menggunakan trik manipulasi aljabar dengan memperhatikan dalil-dalil limit dan atau rumus dasar limit
  Menggunakan dalil l'hopital

- Jika fungsi yang dicari limitnya merupakan fungsi khusus (f.bilangan bulat terbesar, f.mutlak, atau (bersyarat) maka perlu meneliti limit kiri dan limit kanan.

Contoh Soal

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)$$
$$=1^2+1+1$$
$$=3$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$$
$$=\sqrt{9}+3$$
$$=6$$

$$\lim_{x\to 1} x+|x|=\lim_{x\to 1} x+\lim_{x\to 1}|x|$$
$$=1+1$$
$$=2$$

$$\lim_{x\to 3}\left(2x^2-5x+2\right)^8=\left[\lim_{x\to 3}\left(2x^2-5x+2\right)\right]^8$$
$$=\left(2.3^2-5.3+2\right)^8$$
$$=(5)^8$$
$$=390625$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2+5x-1)^{x^2+1}=\left(\lim_{x\to 1}(x^2+5x-1)\right)^{\lim_{x\to 1}x^2+1}$$
$$=(1^2+5.1-1)^{1^2+1}$$
$$=(5)^2$$
$$=25$$

Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2 \; dan \; \lim\limits_{x \to a} g(x) = -8. \; Tentukan:$

$$a. \lim_{x \to a} \sqrt[3]{g(x)}\left(f(x)+3\right) = \lim_{x \to a} \sqrt[3]{g(x)} . \lim_{x \to a}\left(f(x)+3\right)$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to a} g(x)} . \left(\lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} 3\right)$$

$$= \sqrt[3]{-8} . (2+3)$$

$$= -2.(5)$$

$$= -10$$

$$b. \lim_{x \to a} \frac{2f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)} = \frac{2\lim\limits_{x \to a} f(x) - 3\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$= \frac{2.2-3(-8)}{2+(-8)}$$

$$= \frac{4+24}{-6}$$

$$= -\frac{28}{6}$$

$$= -\frac{14}{3}$$

Rumus dasar Limit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0 \; ; \; a \in B.real$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n + \ldots}{bx^m + \ldots} \begin{cases} = \frac{a}{b} & untuk\ n = m \\ = 0 & untuk\ n < m \\ = \infty & untuk\ n > m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad ketentuan \left(\frac{a}{b}\right)^\infty \begin{cases} = 1 & untuk\ a = b \\ = 0 & untuk\ a < b \\ = \infty & untuk\ a > b \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\sim} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$$

Ketentuan

$Jika\ a > p\ maka \sim$

$Jika\ a = p\ maka\ \frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

$Jika\ a < p\ maka\ - \sim$

Contoh Soal

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x^2-5x}{8x^4+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^4}+\frac{7x^2}{x^4}-\frac{5x}{x^4}}{\frac{8x^4}{x^4}+\frac{5}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{8+\frac{5}{x^4}}$$

$$=\frac{\frac{5}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{5}{\infty^3}}{8+\frac{5}{\infty^4}}$$

$$=\frac{0+0-0}{8+0}$$

$$=\frac{0}{8}$$

$$=0$$

1. Bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots}{p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + p_{m-2}x^{m-2} + p_{m-2}x^{m-2} + \cdots} = L$$

L = 0 jika dan hanya jika n < m

L = $\frac{a}{p}$ jika dan hanya jika n = m

L = ∞ jika dan hanya jika n > m

Contoh Soal:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{5x^3 + 14x^x - 7x + 2} = \frac{4}{5}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = \infty$

2. Bentuk tak tentu $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = L$$

L = $-\infty$ jika dan hanya jika a < p

L = $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$ jika dan hanya jika a = p

L = ∞ jika dan hanya jika a > p

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x} - \sqrt{9x^2 - 5x}\right) = \frac{b-q}{2\sqrt{a}} = \frac{3-(-5)}{2\sqrt{9}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 6} - 5x + 3$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 6} - (5x - 3)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 6} - \sqrt{(5x-3)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{25x^2 - 9x - 6} - \sqrt{25x^2 - 30x + 9}$$

$$= \frac{b-q}{2\sqrt{a}} = \frac{-9-(-30)}{2\sqrt{25}} = \frac{21}{10}$$

- **Subtitusi**

Perhatikanlah contoh berikut!

Tentukan nilai

$$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 8\right)!$$

Penyelesaian :

Nilai limit dari fungsi $f(x) = x^2 - 8$ dapat kita ketahui secara langsung, yaitu dengan cara mensubtitusikan $x = 3$ ke $f(x)$

$$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 8\right) = 3^2 - 8 = 9 - 8 = 1$$

- **Pemfaktoran**

Cara ini digunakan ketika fungsi-fungsi tersebut bisa difaktorkan sehingga tidak menghasilkan nilai tak terdefinisi.

Perhatikanlah contoh berikut!

Tentukan nilai

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}\ !$$

Jika x = 3 kita subtitusikan maka

$$f(3) = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}.$$

kita harus mencari fungsi yang baru sehingga tidak terjadi pembagian dengan nol. Untuk menentukan fungsi yang baru itu, kita tinggal menfaktorkan fungsi f (x) sehingga menjadi:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3).\ \left(\frac{x-3}{x-3}\right) = 1$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x+3)$$

$$= 3 + 3 = 6$$

- **Merasionalkan Penyebut**

Cara yang ke-tiga ini digunakan apanila penyebutnya berbentuk akar yang perlu dirasionalkan, sehingga tidak terjadi pembagian angka 0 dengan 0.

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh :

Tentukan nilai

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 2}} \,!$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 2}} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 2}} \cdot \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x - 2})}{(\sqrt{x - 2})^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{x - 2})}{(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x - 1)\sqrt{x - 2}$$

$$= (2 - 1).\sqrt{2 - 2}$$

$$= 1 \,.\, 0$$

$$= 0$$

- **Merasionalkan Pembilang**

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh

Tentukan nilai

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1} !$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{3x-2}\right)^2-\left(\sqrt{4x-3}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3.1-2}+\sqrt{4.1-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Latihan Soal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-2x^4+3x^2-2}{3x^5-2x+1} = \ldots$$

$$\lim_{x\to2} \left(\frac{6-x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right) = \ldots$$

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{x^2-1}\right) = \ldots$$

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{x^2-1}\right) = \ldots$$

$$\lim_{x\to4} \frac{x-4}{1-\sqrt{x-3}} = \ldots$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{\sqrt{x^2}-x} = \ldots$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{x-2} = \ldots$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(4x-1)^3}{2x^3-1} = \ldots$$

$$\lim_{x\to0} \left(\sqrt{4x^2+5x} - \sqrt{4x^2-3}\right) = \ldots$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right) = \ldots$$

$$\lim_{x\to\infty} (3x-2)-\sqrt{9x^2-2x+5} = \ldots$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{(2x-5)(2x+1)}+(5-2x)\right) = \ldots$$

$$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{3x}-3} = \ldots$$

$$\lim_{x\to8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \ldots$$

$$\lim_{x\to0} \frac{4x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}} = \ldots$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-5x+4}{x^3-1} = \ldots$$

$$\lim_{x\to4} \frac{3-\sqrt{x^2-7}}{x^2-2x-8} = \ldots$$

$$\lim_{x\to27} \frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27} = \ldots$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{3x^2+8x-3}-\sqrt{4x^2+9}}{x-2} = \ldots$$

$$\lim_{a\to b} \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \ldots$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \ldots$$

$$\lim_{x\to1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x^2} = \ldots$$