PERTEMUAN 4

- EKSPRESI BOOLEAN
- PRINSIP DUALITAS

ALJABAR BOOLEAN

- Aljabar Boolean adalah aturan dasar logika yang membentuk struktur matematika.
- Salah satu cabang matematika.
- Pertama kali dikemukakan oleh George Boole pada tahun 1854, yaitu melihat adanya sifat serupa antara himpunan dan logika proposisi
- Claude Shannon tahun 1938 memperlihatkan penggunaan aljabar Boolean untuk merancang rangkaian sirkuit yang **menerima masukan dan menghasilkan keluaran 0 dan 1.**
- Sebagai dasar teknologi komputer digital, karena rangkaian elektronik dalam komputer juga bekerja dengan mode operasi bit, 0 dan 1.
- Penggunaan luas yaitu, perancangan rangkaian saklar, rangkaian digital, rangkaian *IC(Integreted Circuit)* komputer

DEFINISI ALJABAR BOOLEAN

Misalkan B himpunan yang didefinisikan pada 2 operator biner + dan .·, dan sebuah uner ’.Kemudian 0 dan 1 elemen yang berbeda dari B,

Maka, Tupel :

<***B*, +, ·, ’**>

disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma atau postulat Huntington berikut:

1. Closure : (i) $a + b \in B$
   (i) $a . b \in B$

2. Identitas: (i) $a + 0 = a$
   (ii) $a \cdot 1 = a$

3. Komutatif: (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a \cdot b = b . a$

4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

5. Komplemen: Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $a' \in B$
   (i) $a + a' = 1$
   (ii) $a \cdot a' = 0$

Note :

Elemen 0 = elemen zero
Elemen 1 = elemen unit
Operator + = Penjumlahan
Operator · = Perkalian
Operator ‘ = komplemen

ALJABAR BOOLEAN DUA NILAI

- Definisi : sebuah himpunan B dengan dua buah elemen 0 dan 1 yang biasa disebut bit (binary digit)

Yaitu :

- $B = \{0, 1\}$
- operator biner, + dan ·
- operator uner, ’
- Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

Pembuktian

1. Identitas : $(i)\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1$

   $(ii)\ 1 . 0 = 0 . 1 = 0$

2. Komutatif : jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.
3. Distributive : dapat ditunjukkan dengan tabel kebenaran

a	b	c	$b+c$	$a.(b+c)$	$a.b$	$a.c$	$(a.b)+(a.c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

4. Komplemen : jelas berlaku karena tabel memperlihatkan bahwa:

   $(i) a + a' = 1, karena\ 0 + 0' = 0 + 1 = 1\ dan\ 1 + 1' = 1 + 0 = 1$

   $(ii) a\ .\ a\ = 0, karena\ 0\ .\ 0' = 0\ .\ 1 = 0\ dan\ 1 + 1' = 1\ .\ 0 = 0$

Karena keempat aksioma terpenuhi, maka **terbukti** bahwa
B = {0,1} bersama operator biner + dan · operator komplemen’ merupakan **Aljabar Boolean**

EKSPRESI BOOLEAN

- Misal (B, +, ·, ‘) adalah aljabar Boolean. Ekspresi Boolean dalam (B, +, ·, ‘) adalah :
  - Setiap elemen di dalam B
  - Setiap peubah
  - Jika e1 dan e2 adalah ekspresi Boolean, maka e1 + e2, e1 · e2, e1’adalah **Ekspresi Boolean.**
- Ekspresi Boolean dikatakan ekivalen jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada n peubah.
  - Contoh : aksioma distributif pertama : a + a’b
    aksioma distributif kedua : (a + b) — Ekivalen
  - **Sehingga kita dapat menulis kedua ekspresi dengan kesamaan** → (a+a’b) = (a **+** b)
  - Dapat dibuktikan dengan **tabel kebenaran**

a	b	a’	a’b	a + a’b	a + b
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Note :

Tanda kurung operator ‘ mempunyai prioritas lebih tinggi dibanding operator + dan · contoh : a + b·c = a + (b.c) bukan (a+b).c

a · b’ = a · (b’) bukan (a · b)’

Apabila dalam bentuk huruf maka operator · dapat kita sederhanakan Penulisannya. Contoh : a(b+c) = ab + ac

PRINSIP DUALITAS

- Misal S adalah kesamaan didalam aljabar Boolean yangb melibatkan operator +, ·, dan komplemen, maka jika pernyataan S* diperoleh dari S dengan cara mengganti

  · dengan +

  \+ dengan ·

  0 dengan 1

  1 dengan 0

  Dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan S* juga benar. S* disebut sebagai *dual* dari S

Contoh :

Tentukan dual dari :

(i) $a + 0 = a$	penyelesaian →	(i) $a \cdot 1 = a$
(ii) $(a \cdot 1)(0+a') = 0$		(ii) $(a + 0) + (1 \cdot a') = 1$
(iii) $a(a'+b) = ab$		(iii) $a + a'b = a + b$
(iv) $(a+b)(b+c) = ac + b$		(iv) $ab + bc = (a + c)b$
(v) $(a + 1)(a+0) = a$		(v) $(a \cdot 0) + (a \cdot 1) = a$

BUKU ACUAN

Rinaldi Munir. (2014). Matematika Diskrit. Bandung : Penerbit Informatika