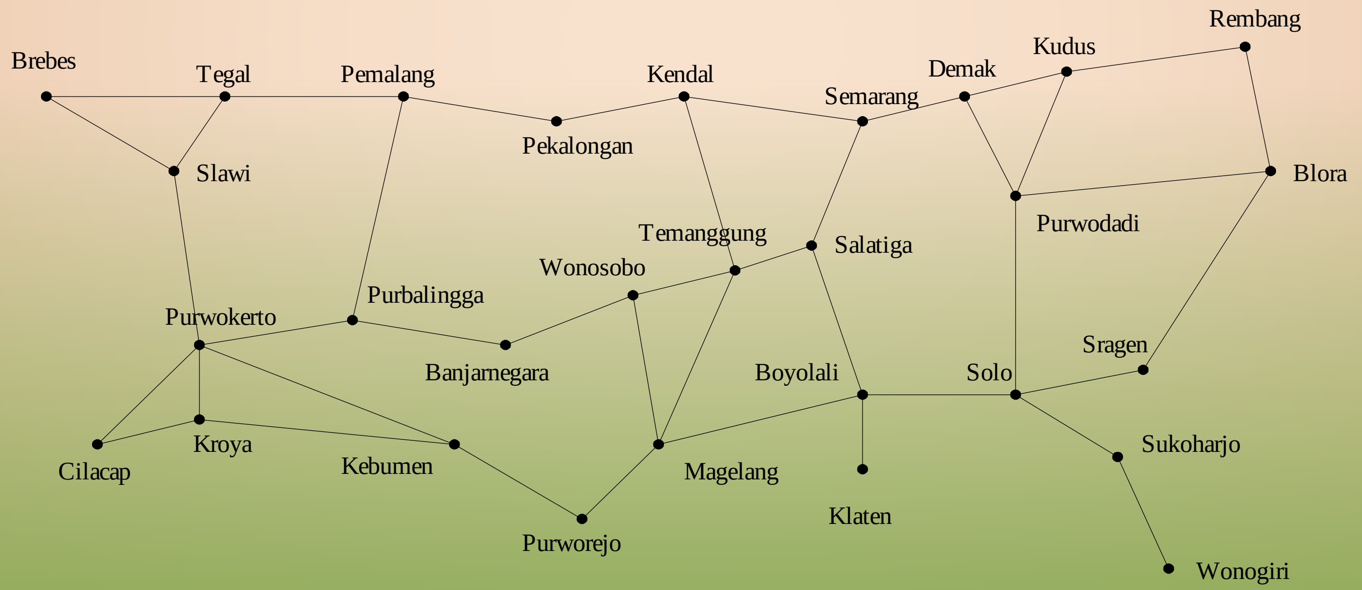
PERTEMUAN 9

- JENIS JENIS GRAF
- REPRESENTASI GRAF
- GRAF PLANAR DAN GRAF BIDANG

GRAF

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.

- Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.



GRAF

Definisi

Sejarah

Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari titik-titik (*vertices*)

$= \{ v_1 , v_2 , ... , v_n \}$

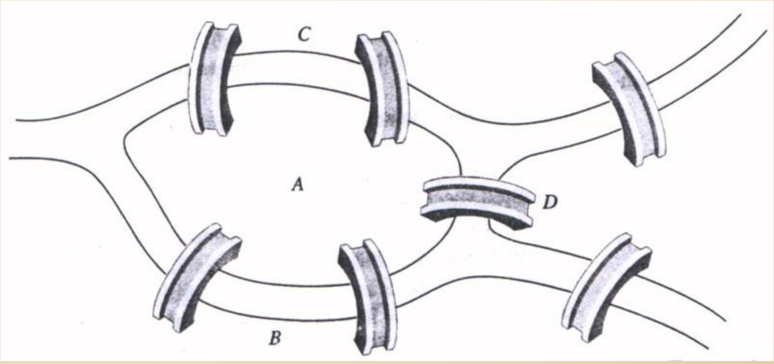
E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik

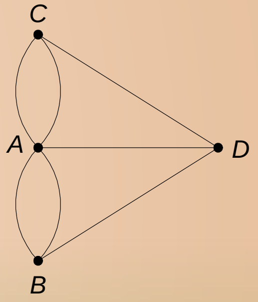
$= \{e_1 , e_2 , ... , e_n \}$

Note :

- V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong
- Graf yang memiliki 1 simpul tanpa sisi disebut graf trivial
- Simpul (V) dapat dinomori dengan huruf (a,b,..) atau bilangan asli (1,2,…) atau keduanya.
- Sisi (E) dapat dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, \dots$ dan penulisannya $e = (v_1, v_2)$

- Sejarah Graf: masalah jembatan Königsberg (tahun 1736)





Gambar 1. Masalah Jembatan Königsberg

- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:
  - Titik (*vertex*) → menyatakan daratan
  - Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan
- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

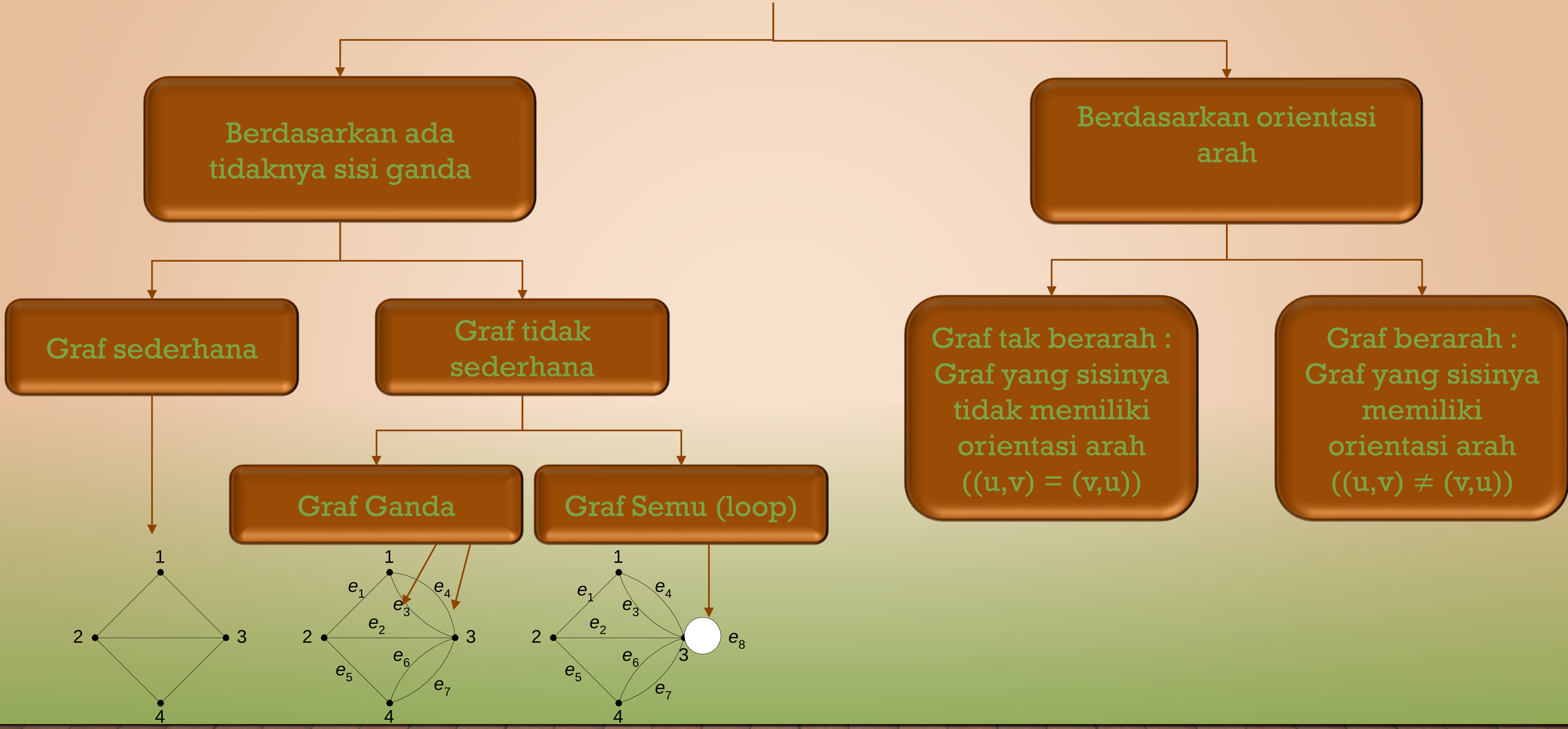
GRAF

- Graf dapat juga didefinisikan suatu **diagram** yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat.
- Penggunaan : untuk menggambarkan berbagai macam struktur
- Tujuannya : sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah untuk dimengerti.
- Contoh dalam keseharian : struktur organisasi, bagan alir, peta, rangkaian lsitrik dan lain sebagainya
- Suatu **diagram** terdiri dari sekumpulan **objek** (**titik**, kotak dan lainnya) dan dihubungkan oleh **garis-garis** (garis-garis menghubungkan antar objek).

DASAR-DASAR GRAF

- Graf G terdiri dari 2 himpunan yang berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong (simbol V(G)) dan himpunan gari-garis (E(G)).
- Tiap garis berhubungan dengan satu atau dua titik disebut **titik ujung**.
    - Garis berhubungan satu titik ujung disebut **loop.**
    - Dua garis berbeda yang menghubungkan titik yang sama disebut garis parallel.
- Dua titik dikatakan berhubungan jika ada garis yang menghubungkan keduanya.
- Titik yang tidak memiliki garis yang berhubungan dengannya disebut titik terasing.
- Graf jika semua garis berarah disebut graf berarah
- Graf jika semua garis tidak berarah disebut graf tidak berarah
- Panjang garis, kelengkungan garis serta letak titik tidak berpengaruh dalam suatu graf

JENIS-JENIS GRAF



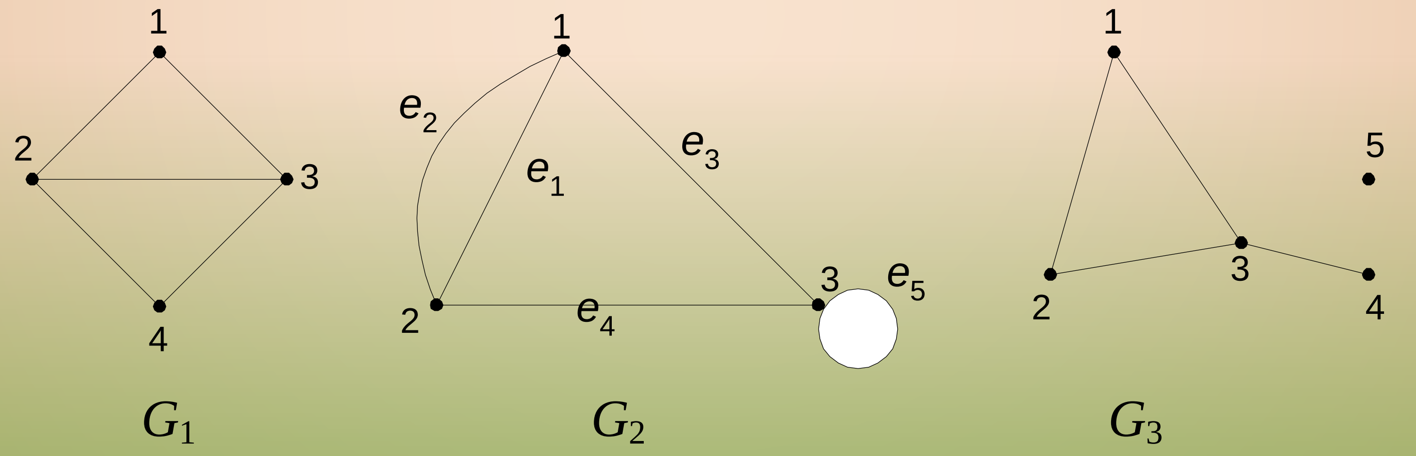
TERMINOLOGI GRAF

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah titik dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graf G_1 : titik 1 bertetangga dengan titik 2 dan 3,

titik 1 tidak bertetangga dengan titik 4.



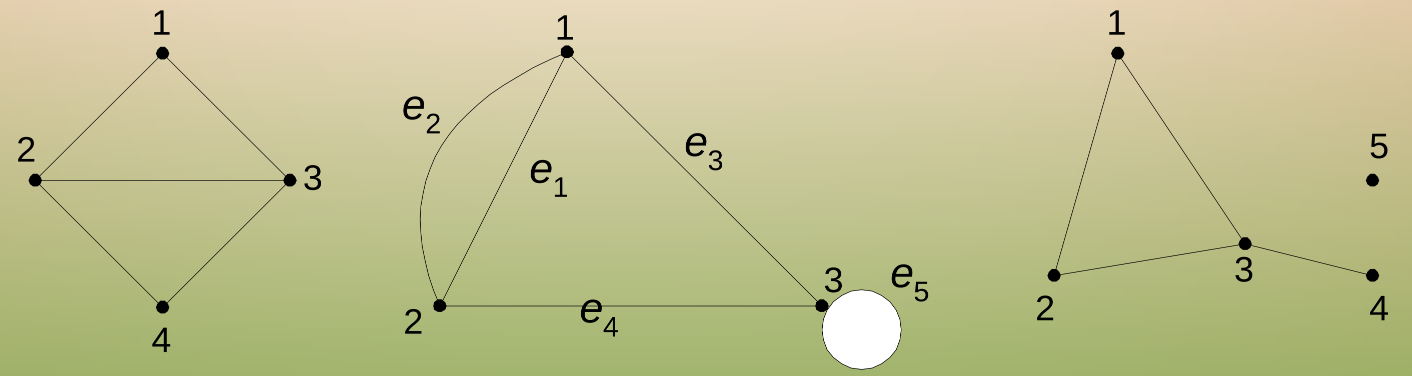
TERMINOLOGI GRAF

2. Bersisian (*Incidency*)

Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

e bersisian dengan titik v_j , atau
e bersisian dengan titik v_k

Tinjau graf G_1: sisi (2, 3) bersisian dengan titik 2 dan titik 3,
sisi (2, 4) bersisian dengan titik 2 dan titik 4,
tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan titik 4.

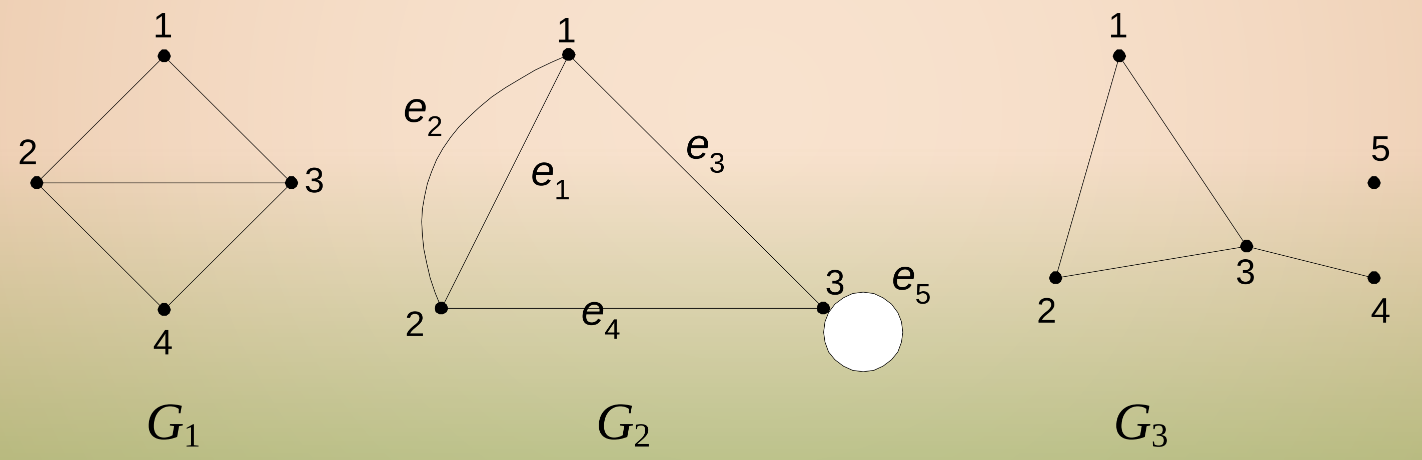


G_1 G_2 G_3

TERMINOLOGI GRAF

3. Titik Terpencil (*Isolated Vertex*)

Titik terpencil ialah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.
Tinjau graf G_3: titik 5 adalah titik terpencil.

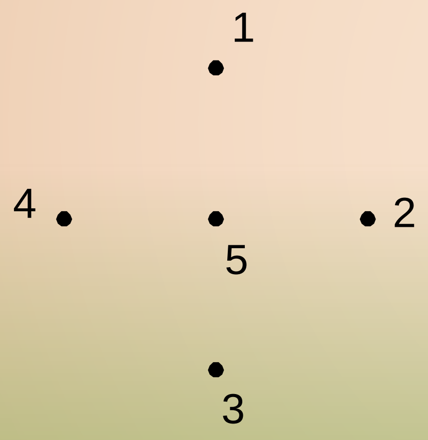


TERMINOLOGI GRAF

4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).

Graf N_5 :



TERMINOLOGI GRAF

5. Derajat (*Degree*)

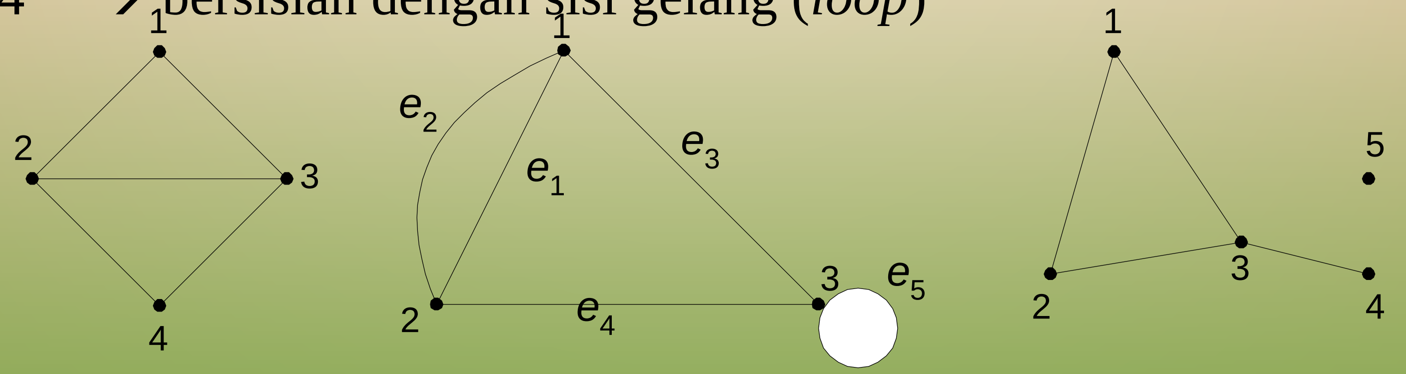
Derajat suatu titik adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut.

Notasi: $d(v)$

Tinjau graf G_1: $d(1) = d(4) = 2$
$d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf G_3: $d(5) = 0$ → titik terpencil
$d(4) = 1$ → titik anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graf G_2: $d(1) = 3$ → bersisian dengan sisi ganda
$d(3) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)



G_1 G_2 G_3

TERMINOLOGI GRAF

Pada graf berarah,

$d_{in}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree*)

= jumlah busur yang masuk ke titik v

$d_{out}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*)

= jumlah busur yang keluar dari titik v

$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$

TERMINOLOGI GRAF

Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua titik pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Tinjau graf G_1: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$

$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

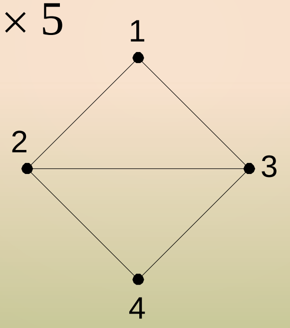
Tinjau graf G_2: $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$

$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

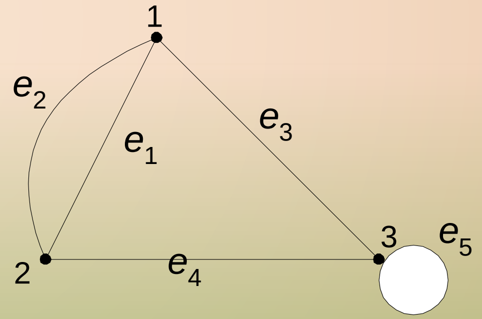
Tinjau graf G_3: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$

$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$

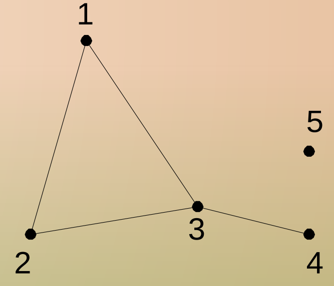
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 4$



G_1



G_2



G_3

TERMINOLOGI GRAF

- Akibat dari *lemma* (*corollary*):

  Teorema: Untuk sembarang graf G, banyaknya titik berderajat ganjil selau genap.

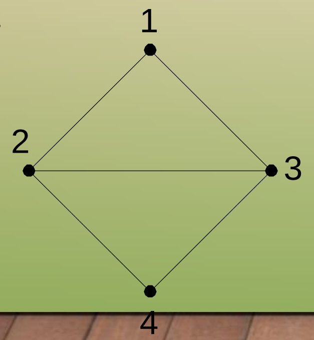
TERMINOLOGI GRAF

6. Lintasan (*Path*)

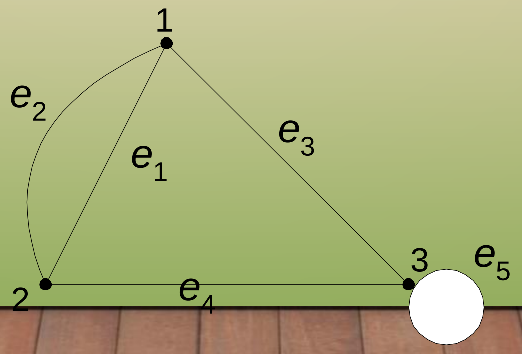
Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots , v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

Tinjau graf G_1: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

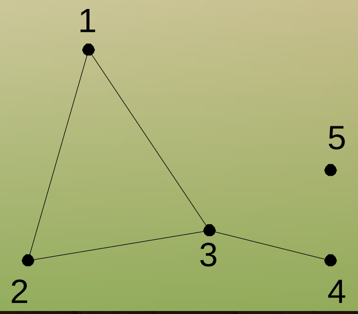
Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.



G_1



G_2



G_3

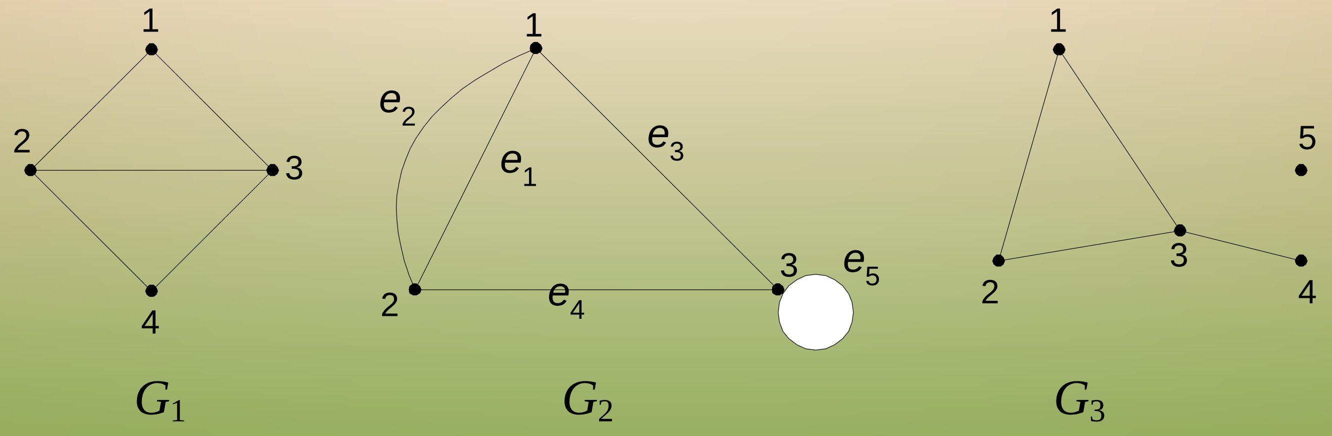
TERMINOLOGI GRAF

7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf G_1: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.



TERMINOLOGI GRAF

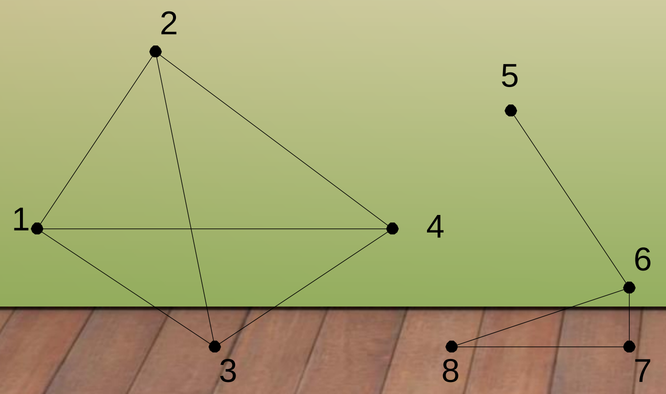
8. Terhubung (*Connected*)

Dua buah titik v_1 dan titik v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2.

G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j.

Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Contoh graf tak-terhubung:



TERMINOLOGI GRAF

- Graf berarah *G* dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari *G* diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

- Dua titik, *u* dan *v*, pada graf berarah *G* disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari *u* ke *v* dan juga lintasan berarah dari *v* ke *u*.

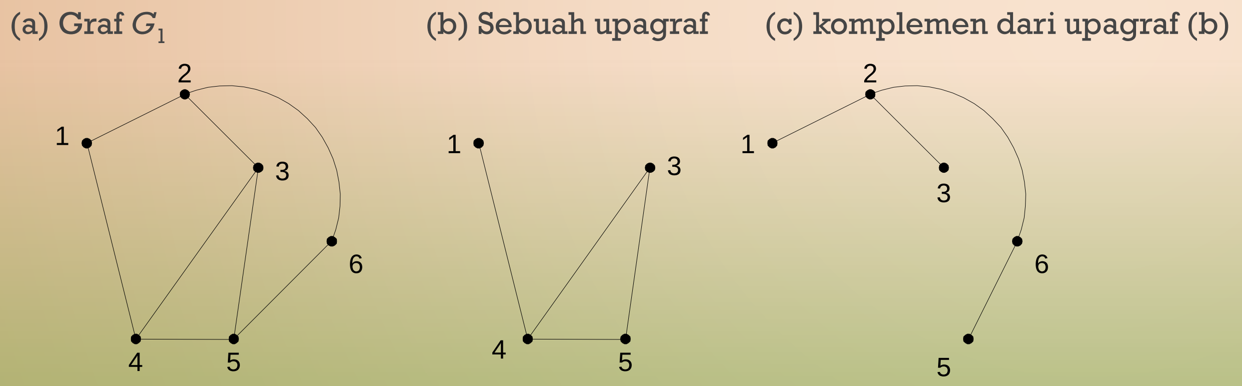
- Jika *u* dan *v* tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka *u* dan *v* dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*).

TERMINOLOGI GRAF

9. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan titik yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

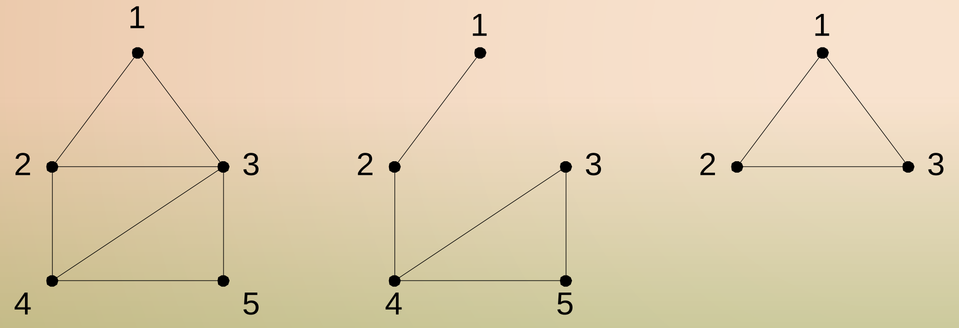


TERMINOLOGI GRAF

10. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua titik dari G).

(a) graf G, (b) upagraf rentang dari G, (c) bukan upagraf rentang dari G



TERMINOLOGI GRAF

10. *Cut-Set*

Cut-set dari graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set*,

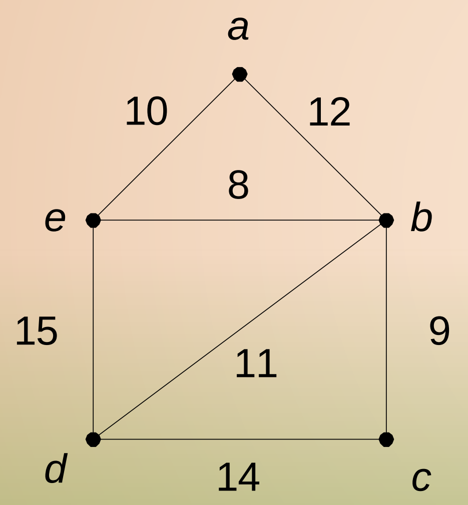
tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.

(a) (b)

TERMINOLOGI GRAF

11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



REPRESENTASI GRAF

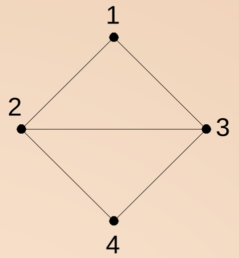
Contoh:

1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

$A = [a_{ij}]$,

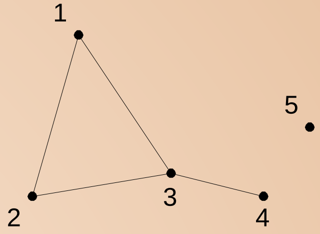
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Graf dengan Matriks tetanggaan masing-masing



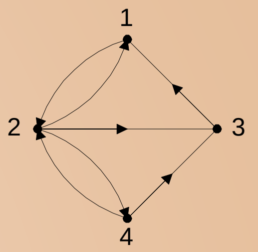
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(a)



$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

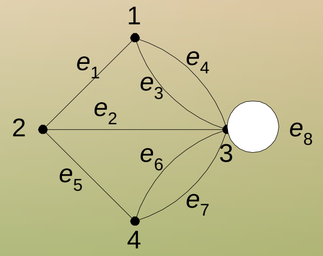
(b)



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(c)

Matriks tetanggaan untuk graf mengandung sisi ganda dan gelang



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Derajat tiap simpul *i*:

(a) Untuk graf tak-berarah

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

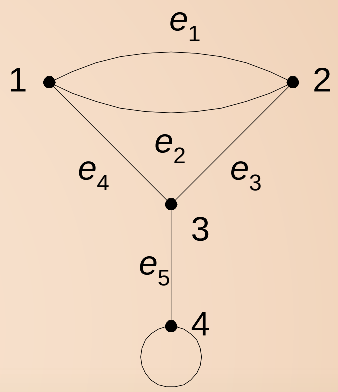
$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

REPRESENTASI GRAF

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

$$A = [a_{ij}],$$

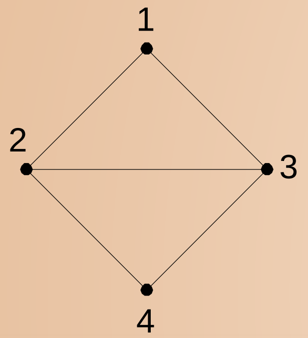
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

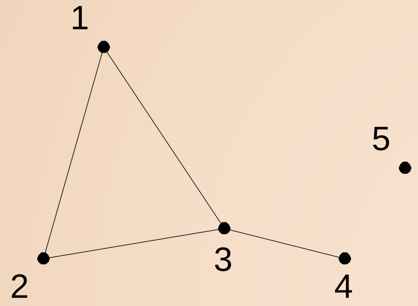
REPRESENTASI GRAF

3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)



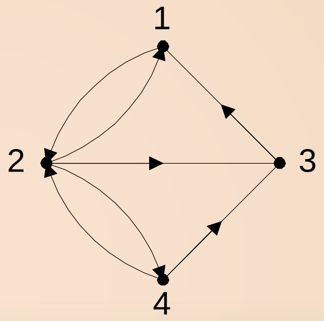
Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)



Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)

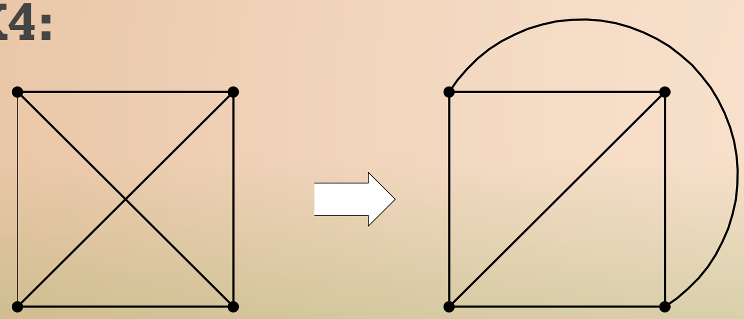


Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

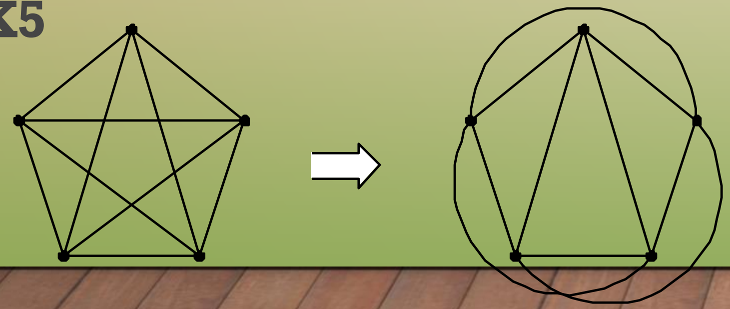
(c)

GRAF PLANAR

- **Definisi : graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong, jika tidak maka ia disebut graf tak-planar**
- **Contoh K4:**

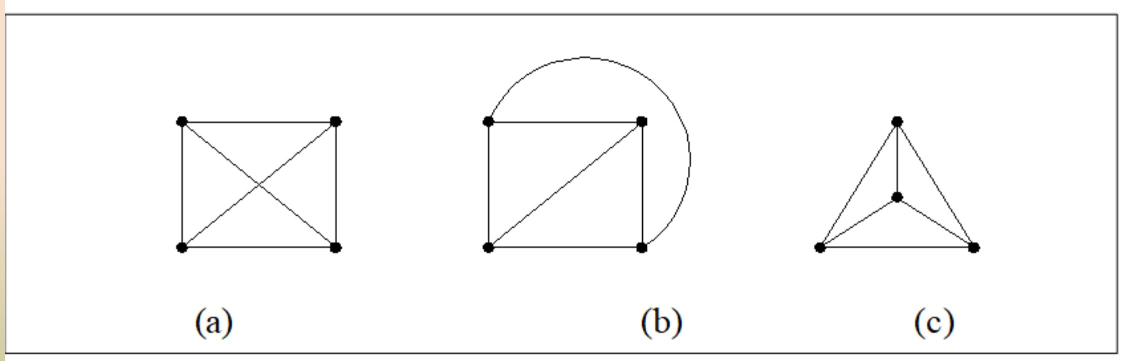


- **Contoh K5**



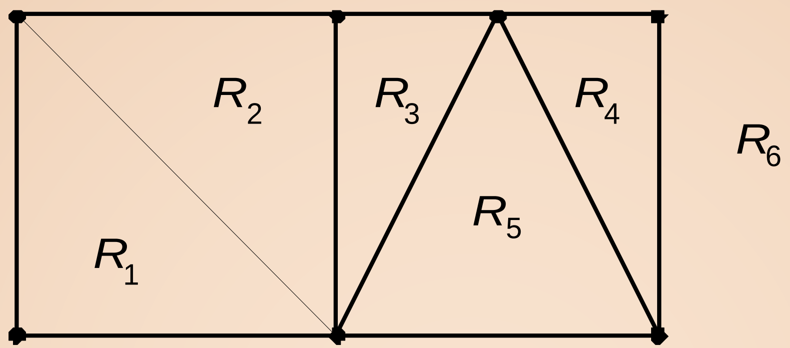
GRAF BIDANG

- **Definisi : representasi graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan.**
- **Contoh a = graf planar ; b dan c graf bidang :**



RUMUS EULER

- Contoh Graf planar terdiri atas 6 wilayah (R1,R2,R3,R4,R5,R6)



- Jumlah wilayah (f) dapat dihitung dengan rumus euler :

$$f = e - n + 2$$

Dimana : f = jumlah wilayah

e = jumlah sisi

n = jumlah simpul

BUKU ACUAN

Rinaldi Munir. (2014). Matematika Diskrit. Bandung : Penerbit Informatika