



Distribusi Normal dan Normal Baku

Distribusi Normal

- Distribusi yang terpenting dalam statistik adalah distribusi normal atau distribusi Gaussian.
- Fungsi kepadatan untuk distribusi normal adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

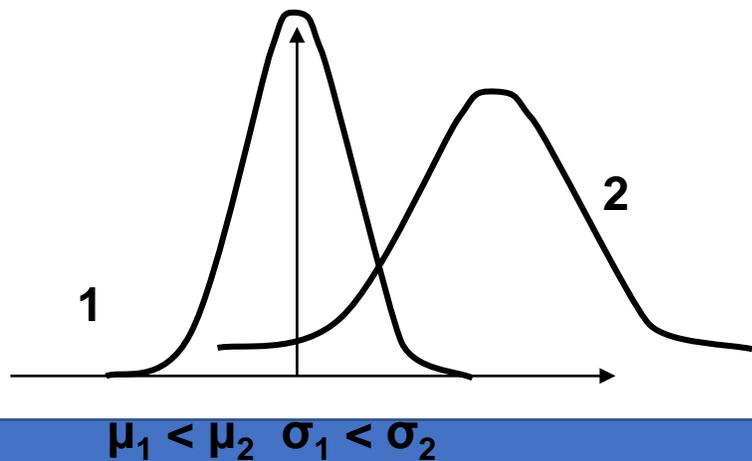
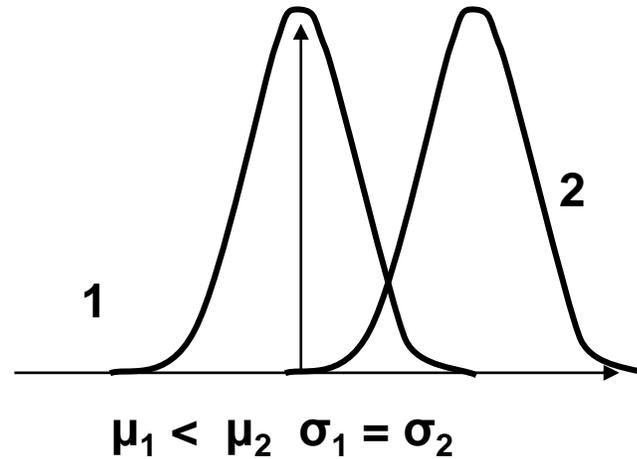
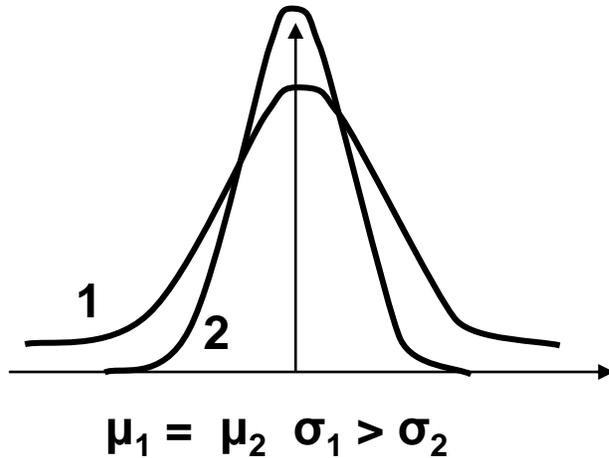
dimana μ dan σ adalah mean dan standar deviasi.

Karakteristik dari Distribusi Probabilitas dan Kurva Normal

1. Kurva berbentuk lonceng dan memiliki satu puncak yang terletak tengah.
2. Distribusi normal mempunyai bentuk simetris maka median dan modus juga berada ditengah-tengah kurva normal, sehingga nilai rata-rata dengan median dan modus adalah sama.
3. Distribusi probabilitas dan kurva normal berbentuk kurva simetris dengan rata-rata hitungnya (μ).
4. Distribusi probabilitas dan kurva normal bersifat asimptotis.
5. Mode (*maximum*) terjadi di $x = \mu$
6. Total luas daerah dibawah kurva normal adalah 1

Distribusi Normal

Bentuk distribusi normal ditentukan oleh μ dan σ .



**SEMAKIN BESAR NILAI σ , MAKA KURVA
AKAN SEMAKIN LANDAI,
DAN SEMAKIN KECIL NILAI σ MAKA KURVA
AKAN SEMAKIN MELANCIP**

Kurva Distribusi Normal Baku (*Standard*)

Distribusi normal baku adalah distribusi normal dengan mean $\mu = 0$ dan simpangan baku $\sigma = 1$.

Transformasi

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

memetakan distribusi normal menjadi distribusi normal baku, sebab distribusi normal dengan variabel z (skor z) ini memiliki mean = 0 dan standard deviasi = 1.

Kurva Distribusi Normal Standard

Transformasi ini juga mempertahankan luas dibawah kurjanya, artinya:

$$\begin{array}{l} \text{Luas dibawah kurva} \\ \text{distribusi normal} \\ \text{antara } x_1 \text{ dan } x_2 \end{array} = \begin{array}{l} \text{Luas dibawah kurva} \\ \text{distribusi normal} \\ \text{standard antara } z_1 \text{ dan} \\ z_2 \end{array}$$

Dengan $z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma$ dan $z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma$.
Sehingga cukup dibuat tabel distribusi normal standard kumulatif saja!

$$P(Z > z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$$

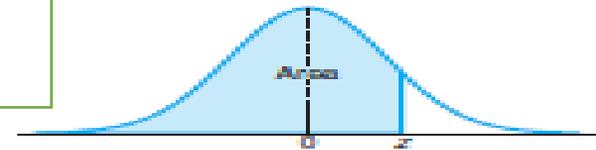


Table A.3 Areas under the Normal Curve

<i>z</i>	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451

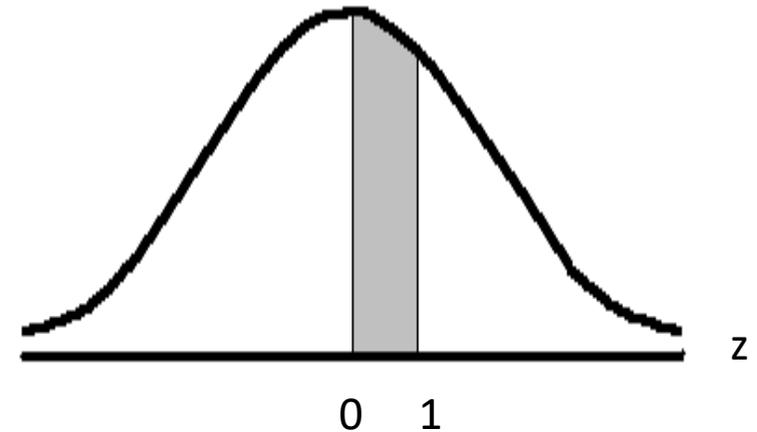
Penggunaan Tabel Distribusi Normal *Standard*

Hitung luas wilayah dibawah kurva normal :

- a. Antara nilai $Z = 0$ dan $Z = 1$

Perhatikan gambar dibawah ini :

Untuk menghitung luas yang dibatasi $Z = 0$ dan $Z = 1$, cari nilai ditabel distribusi Z yang sesuai dengan $Z = 1,00$ dan $z = 0,00$.



$$P(0,00 \leq Z \leq 1,00) = P(Z \leq 1,00) - P(Z \leq 0,00) = 0,8413 - 0,5000 = 0,3413$$

Berarti luas daerah yang diarsir adalah 34,13% dari luas seluruh daerah dibawah kurva.

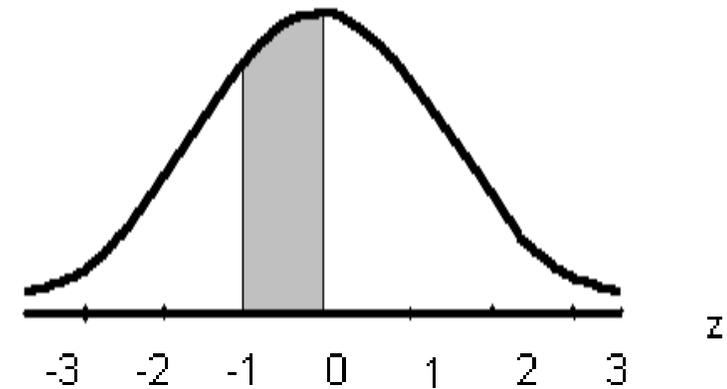
Penggunaan Tabel Distribusi Normal *Standard*

Hitung luas wilayah dibawah kurva normal :

a. Antara nilai $Z = -1$ dan $Z = 0$

Perhatikan gambar dibawah ini :

$$\begin{aligned} P(-1,00 \leq Z \leq 0,00) &= P(Z \leq 0,00) - P(Z \leq -1,00) \\ &= 0,5000 - 0,1587 = 0,3413 \end{aligned}$$



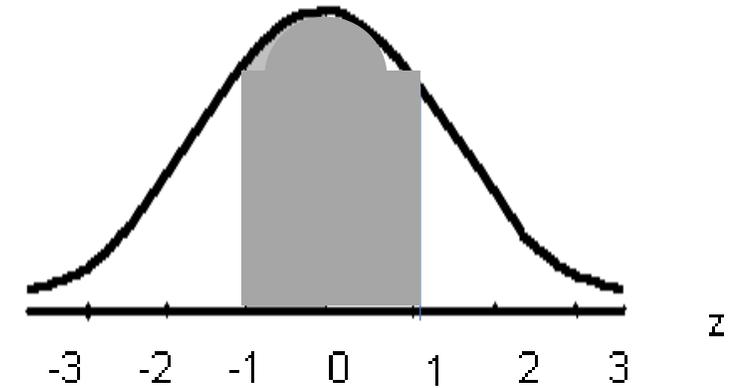
Berarti luas daerah yang diarsir adalah 34,13% dari luas seluruh daerah dibawah kurva.

Penggunaan Tabel Distribusi Normal *Standard*

Hitung luas wilayah dibawah kurva normal :

a. Antara nilai $Z = -1$ dan $Z = 1$

Perhatikan gambar dibawah ini :



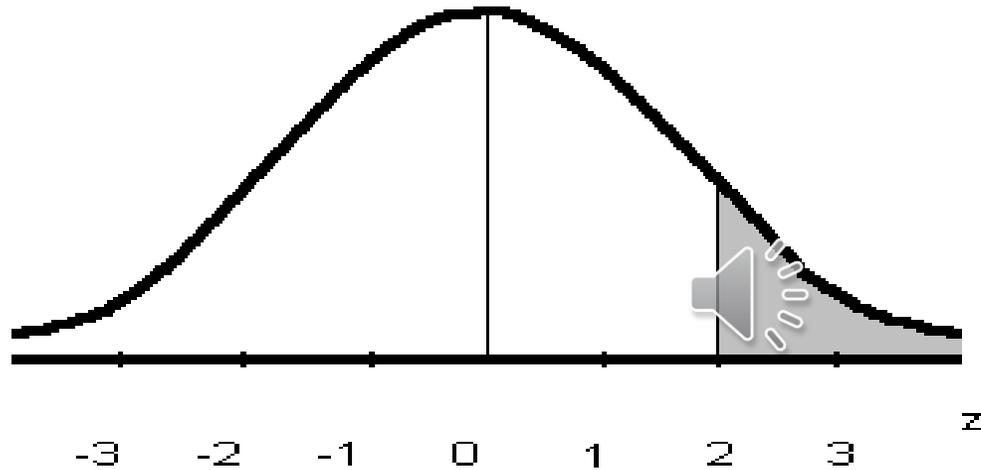
$$\begin{aligned}P(-1,00 \leq Z \leq 0,00) &= P(Z \leq 0,00) - P(Z \leq -1,00) \\ &= 0,5000 - 0,1587 = 0,3413\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(0,00 \leq Z \leq 1,00) &= P(Z \leq 1,00) - P(Z \leq 0,00) \\ &= 0,8413 - 0,5000 = 0,3413\end{aligned}$$

$$\text{Jumlahnya} = \text{luas yang dicari} = 0,3413 + 0,3413 = 0,6826$$

Penggunaan Tabel Distribusi Normal *Standard*

Hitung luas daerah yang diarsir pada gambar dibawah ini :

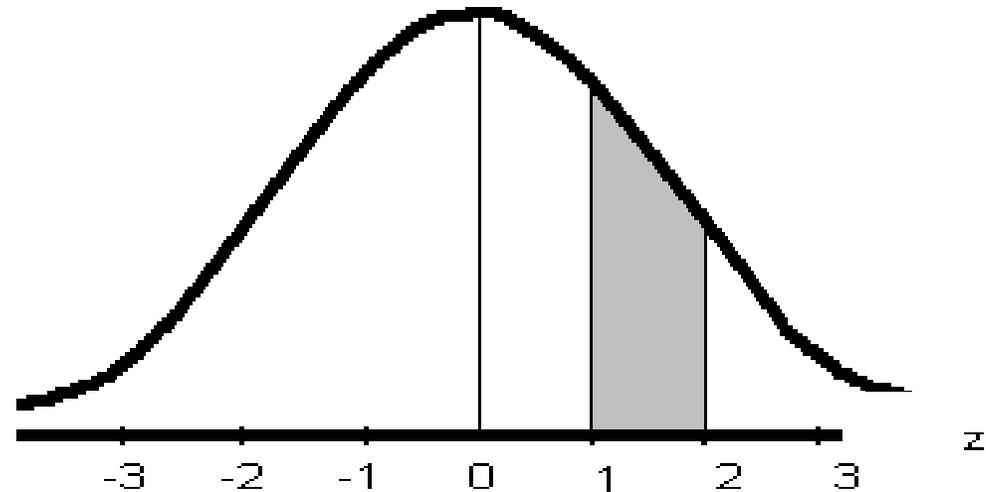


$$P(Z \geq 2,00) = 1 - P(Z \leq 2,00) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Penggunaan Tabel Distribusi Normal *Standard*

- ▶ Antara nilai $Z = 1$ dan $Z = 2$

Perhatikan gambar berikut :



Untuk menghitung luas nilai $Z = 1$ dan $Z = 2$, kita harus mencari luas $1 \leq Z \leq 2$, terlebih dahulu kita hitung luas $0 \leq Z \leq 2$, kemudian dikurangkan dengan luas $0 \leq Z \leq 1$.

- Luas $0 \leq Z \leq 2 = 0,4772$ atau (47,72%)
 - Luas $0 \leq Z \leq 1 = 0,3413$ atau (34,13%)
-
- Luas $1 \leq Z \leq 2 = 0,1359$ atau (13,59%)

Maka $Z = 1$ dan $Z = 2$ adalah 13,59%)

Probabilitas Variabel Random X Normal *Standard*

Ilustrasi 1

Nilai ujian Akuntansi Biaya di sebuah kelas terdistribusi secara normal dengan rata-rata 60 dan standard deviasi 10. Tentukan:

- Berapa persen siswa yang memperoleh nilai > 71 ?
- Berapa persen siswa yang memperoleh nilai antara $60 - 70$?
- Berapa persen siswa yang memperoleh nilai < 59 ?

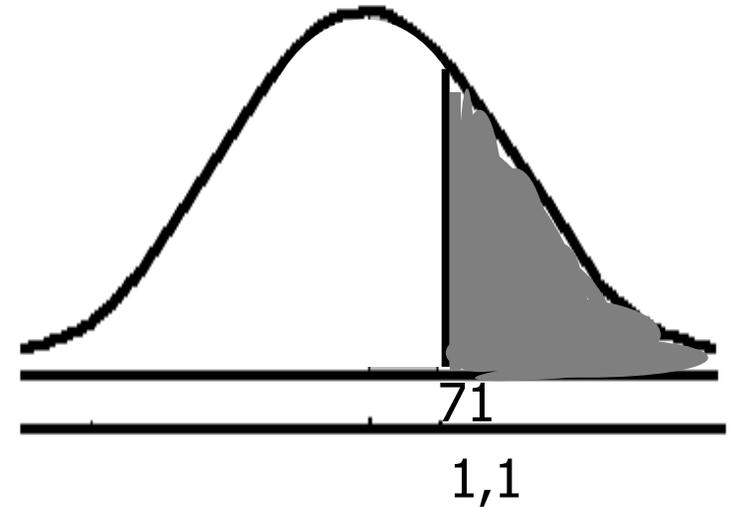
Probabilitas Variabel Random X Normal *Standard*

Solusi 1

a. Berapa persen siswa yang memperoleh nilai > 71 ?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
$$z_1 = \frac{71 - 60}{10} = 1,1$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } P(x > 71) &= P(z > 1,1) \\ &= 1 - P(Z < 1,1) \\ &= 1 - 0,8643 \\ &= 0,1357 \text{ atau } 13,57\% \end{aligned}$$



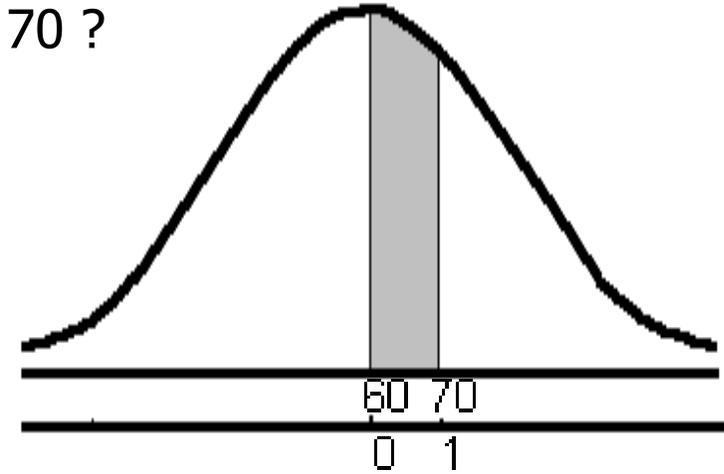
$$\begin{aligned} \text{Maka } P(x > 71) &= P(z > 1,1) \\ &= 0,1357 \end{aligned}$$

Siswa yang mendapat nilai lebih besar dari 71 adalah 13,57%.

Probabilitas Variabel Random X Normal *Standard*

b. Berapa persen siswa yang memperoleh nilai antara 60 – 70 ?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
$$z_1 = \frac{60 - 60}{10} = 0$$
$$z_2 = \frac{70 - 60}{10} = 1$$



$$\text{Maka } P(60 \leq x \leq 70) = P(0 \leq z \leq 1)$$
$$= 0,3413$$

Siswa yang mendapat nilai antara 60 - 70 adalah 34,13%

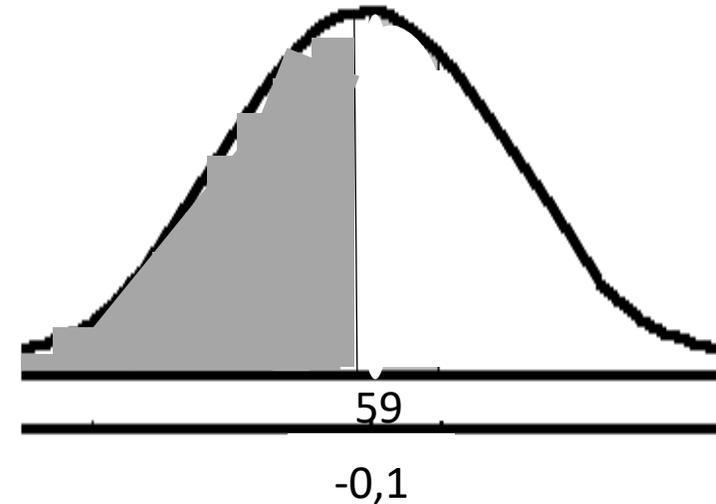
Probabilitas Variabel Random X Normal *Standard*

Solusi 1

c. Berapa persen siswa yang memperoleh nilai < 59 ?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
$$z_1 = \frac{59 - 60}{10} = -0,1$$

$$\text{Sehingga } P(x < 59) = P(z < -0,1)$$
$$= 0,4602 \text{ atau } 46,02\%$$

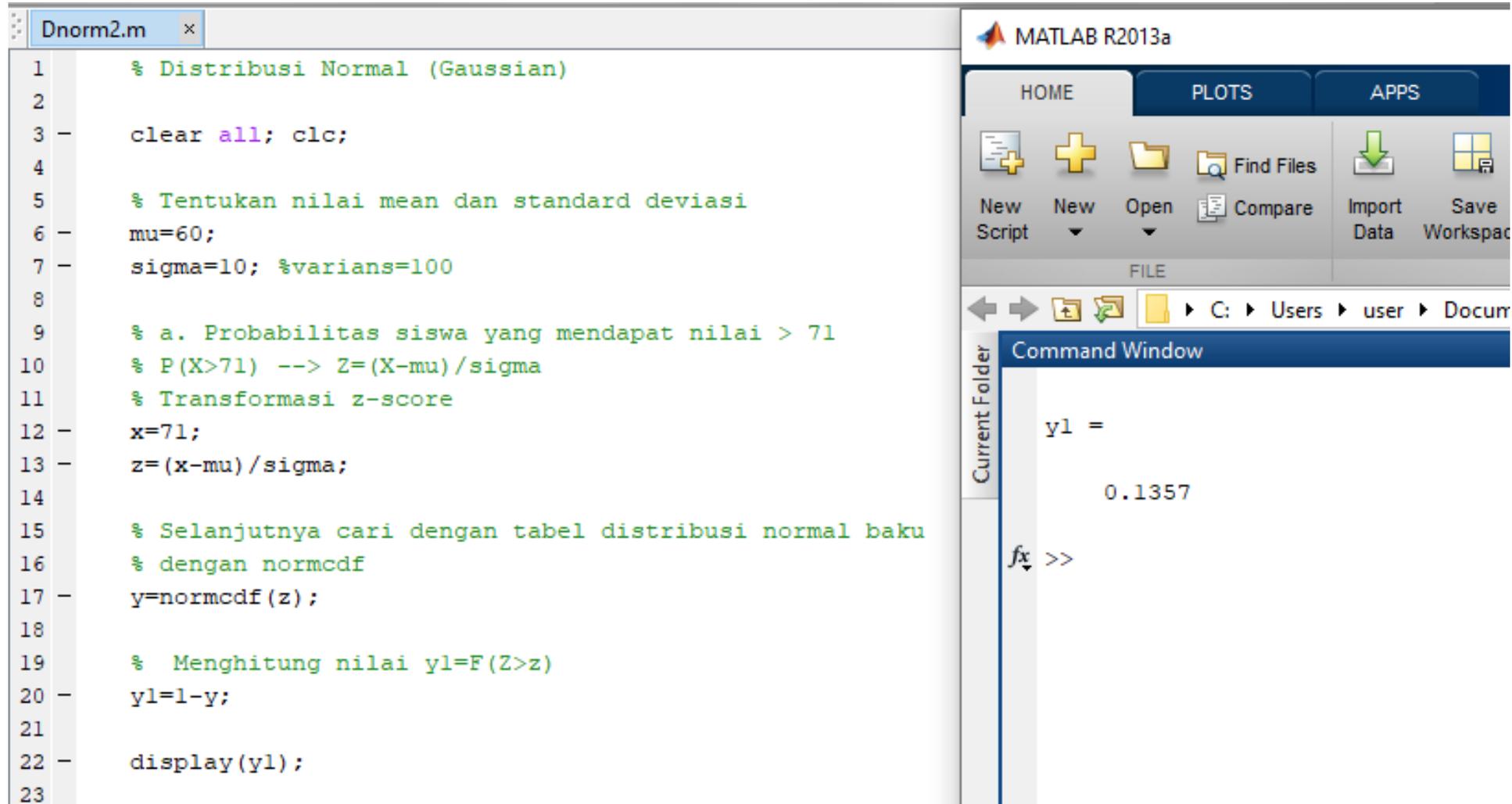


$$\text{Maka } P(x < 59) = P(z < -0,1)$$
$$= 0,4602$$

Siswa yang mendapat nilai lebih kecil dari 59 adalah 46,02%.

Perhitungan dengan Matlab

Soal kasus pada Ilustrasi 1



The image shows a MATLAB R2013a environment. On the left, a script editor displays the following code for calculating the probability of a student getting a score greater than 71 from a normal distribution with mean 60 and standard deviation 10:

```
1 % Distribusi Normal (Gaussian)
2
3 clear all; clc;
4
5 % Tentukan nilai mean dan standard deviasi
6 mu=60;
7 sigma=10; %varians=100
8
9 % a. Probabilitas siswa yang mendapat nilai > 71
10 % P(X>71) --> Z=(X-mu)/sigma
11 % Transformasi z-score
12 x=71;
13 z=(x-mu)/sigma;
14
15 % Selanjutnya cari dengan tabel distribusi normal baku
16 % dengan normcdf
17 y=normcdf(z);
18
19 % Menghitung nilai y1=F(Z>z)
20 y1=1-y;
21
22 display(y1);
23
```

On the right, the Command Window shows the execution results:

```
y1 =
    0.1357
fx >>
```

The MATLAB interface includes a ribbon with tabs for HOME, PLOTS, and APPS, and a file explorer showing the current folder path: C:\Users\user\Documents.

Perhitungan dengan Matlab

Soal kasus pada Ilustrasi 1

The image shows a MATLAB R2013a environment with a script editor on the left and a command window on the right. The script, named 'Dnorm3.m', calculates the probability of a student's score falling between 60 and 70 for a normal distribution with a mean of 60 and a standard deviation of 10. The calculation involves transforming the scores into z-scores and using the standard normal cumulative distribution function (normcdf).

```
1 % Distribusi Normal (Gaussian)
2
3 clear all; clc;
4
5 % Tentukan nilai mean dan standard deviasi
6 mu=60;
7 sigma=10; %varians=100
8
9 % b. Probabilitas siswa yang mendapat nilai antara 60 - 70
10 % P(60<X<70) --> Z=(X-mu)/sigma
11 % Transformasi z-score
12 x1=60;
13 x2=70;
14 z1=(x1-mu)/sigma;
15 z2=(x2-mu)/sigma;
16
17 % Selanjutnya cari dengan tabel distribusi normal baku
18 % dengan normcdf
19 y1=normcdf(z1);
20 y2=normcdf(z2);
21
22 % Menghitung nilai y3=F(z1<Z<z2)
23 y3=y2-y1;
24
25 display(y3);
26
```

The Command Window shows the result of the calculation:

```
y3 =
    0.3413
fx >>
```

Perhitungan dengan Matlab

Soal kasus pada Ilustrasi 1

```
Dnorm4.m x
1 % Distribusi Normal (Gaussian)
2
3 clear all; clc;
4
5 % Tentukan nilai mean dan standard deviasi
6 mu=60;
7 sigma=10; %varians=100
8
9 % c. Probabilitas siswa yang mendapat nilai < 59
10 % P(X<59) --> Z=(X-mu)/sigma
11 % Transformasi z-score
12 x=59;
13 z=(x-mu)/sigma;
14
15 % Selanjutnya cari dengan tabel distribusi normal baku
16 % dengan normcdf
17 y=normcdf(z);
18
19 % Menghitung nilai y=F(Z<z)
20 x=y;
21
22 display(y);
23
```

MATLAB R2013a

HOME PLOTS

New Script New Open Find Files Compare

FILE

C:\Users\

Command Window

Current Folder

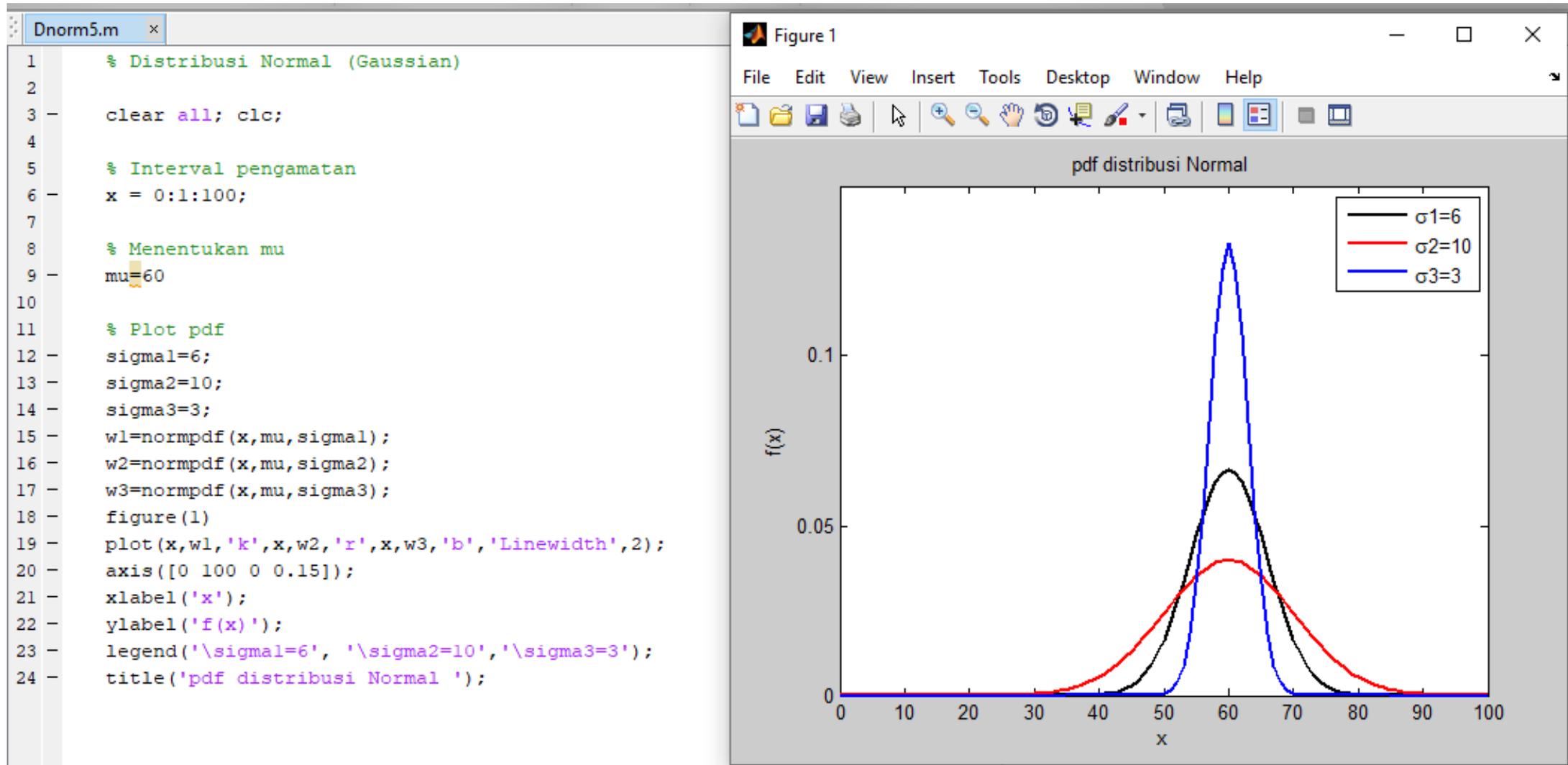
y =

0.4602

fx >>

Perhitungan dengan Matlab

Gambarkan grafik pdf untuk $\sigma = 5$, $\sigma = 10$, $\sigma = 2$



TERIMA KASIH