PERTEMUAN 9

KALKULUS DASAR

Program Studi Informatika
Universitas Indraprasta PGRI

A. Turunan Aturan Rantai

Dalam penyelesaian turunan dengan aturan rantai ada dua yaitu

1. Cara tidak langsung menggunakan pemisah

   Misalkan

   $$y = f(x) \rightarrow \frac{dy}{du}$$

   $$u = g(x) \rightarrow \frac{du}{dv}$$

   $$v = h(x) \rightarrow \frac{dv}{dx}$$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

2. Cara langsung denga menggunakan filosofi mengupas kulit bawang. Artinya dikerjakan dari bagian yang terluar terlebih dahulu.

Contoh 1.

$y = \ln [\cos (x^2 + 3)]$

Misalkan

$v = x^2 + 3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$

$u = \cos(x^2+3) = \cos v \rightarrow \frac{du}{dv} = -\sin v = -\sin(x^2+3)$

$y = \ell n \cos(x^2+3) = \ell n u = \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\cos(x^2+3)}$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dv} . \frac{dv}{dx}$

$= \frac{1}{\cos(x^2+3)}.(\sin(x^2+3)).2x$

$= \frac{-2x\sin(x^2+3)}{\cos(x^2+3)}$

$= -2x \tan\left(x^2+3\right)$

Contoh 2.

$y = [cos^3(x^2 - 6)]^4$

$y = [cos^3(x^2 - 6)]^4$

$y = [cos^{12}(x^2 - 6)]$

$y = [cos^{\square}(x^2 - 6)]^{12}$

Misalkan

$v = x^2 - 6 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$

$u = \cos(x^2-6) = \cos v \rightarrow \frac{du}{dv} = -\sin v = -\sin(x^2-6)$

$y = \cos^{12}(x^2-6) = u^{12} \rightarrow \frac{dy}{du} = 12u^{11} = 12\cos^{11}(x^2-6)$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dv} . \frac{dv}{dx}$

$= 12\cos^{11}(x^2-6). -\sin(x^2-6).2x$

$= -24\cos^{11}(x^2-6)\sin(x^2-6)$

Contoh 3

$y = Cos^2(3x)$

$y = 2\ Cos\ (3x) - Sin\ (3x)\ 3$

$y = -6\ Sin\ (3x)\ Cos\ (3x)$

Contoh 4

$y = cos^3(3-2x)$

Misalkan: $u = \cos(3-2x)$

$u' = -2.-\sin(3-2x)$ diferensialkan

$u' = 2\sin(3-2x)$

Maka:

$y = cos^3(3-2x)$

$y = u^3$

$y' = 3u^2.u'$ aturan rantai

$= 3\cos^2(3-2x).2\sin(3-2x)$

$= 3.2\sin(3-2x).\cos(3-2x).\cos(3-2x)$

$= 3.\sin 2(3-2x).\cos(3-2x)$ $2sinAcosA = sin2A$

$= 3.\sin(6-4x).\cos(3-2x)$

By: @Rudolph___

B. Turuan Parsial

Turunan parsial adalah turunan yang jika diturunkan dengan berbeda variabel tanpa adanya variabel yang sama dengann yang turunkan maka hasilnya adalah nol. Sedangkan jika masih ada penggandengnya maka dapat dituliskan kembali.

Contoh 1

$$f(x, y) = 2x^3y^4 + 5x^2y^5 - 10x^2 + 11y^3$$

Maka

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial x} = 6x^2y^4 + 10x^{\square}y^5 - 20x^{\square}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial y} = 8x^3y^3 + 25x^2y^4 + 33y^2$$

Contoh 2

$$f(x, y) = 7x^2y^2 + x^2y^3$$

Maka

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial x} = 14x^{\square}y^2 + 2x^{\square}y^3$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial y} = 14x^2y^2 + 3x^2y^2$$

C. Aplikasi Turunan

Pada materi aplikasi turunan hanya mempelajari tentang persoalan maksimum dan minimum khusunya pada biang ilmu ekonomi.

Contoh 1

Akan dibuat tempat air dari plat kaleng yang sangat tipis yang alasnya berbentuk lingkaran dan dapat menampung air sebanyak 1000 liter. Tentukan ukuran tempat air (jari-jari dan tinggi) agar bahan yang dipakai sehemat mungkin. catatan : tempat air tersebut tidak memakai tutup.

volume silinder

$$v = \pi r^2 h$$

$$1000l = \pi r^2 h$$

$$1000000cm^3 = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1000000}{\pi r^2}$$

Luas Bahan

$$L = \pi r^2 + 2\pi r h$$
$$= \pi r^2 + 2\pi r.\frac{1000000}{\pi r^2}$$
$$= \pi r^2 + 2.\frac{1000000}{r}$$
$$= \pi r^2 + 2000000 r^{-1}$$

Syarat Ekstreem $\frac{dL}{dr} = 0$

$$\frac{dL}{dr} = 2\pi r - 2000000 r^{-2} = 0$$
$$2\pi r = 2000000 r^{-2}$$
$$\pi r^3 = 1000000$$
$$r^3 = \frac{1000000}{\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000000}{\pi}}$$
$$r = \frac{100}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

Maka

$$h = \frac{1000000}{\pi r^2}$$
$$= \frac{1000000}{\pi\left(\frac{100}{\pi^{1/3}}\right)^2}$$
$$= \frac{1000000}{\pi \frac{10000}{\pi^{2/3}}}$$
$$= \frac{100}{\pi^{1/3}}$$

Jadi panjang r $= \frac{100}{\pi^{1/3}}$ cm dan h $= \frac{100}{\pi^{1/3}}$ cm

Jika fungsi biaya total c = $\frac{1}{3}Q^3 - \frac{7}{2}Q^2 + 12Q - 5$ fungsi marginal, dinyatakan MC adalah turunan dari fungsi biaya total terhadap Q, dengan Q menyatakan jumlah produk, maka berapa unit produksi agar biaya total minimum.

Jawab

Turunan pertama = 0

Maka

$Q^2 - 7Q + 12 = 0$

$(Q - 4)(Q - 3) = 0$

$Q - 4 = 0 \; maka \; Q_1 = 4$

$Q - 3 = 0 \; maka \; Q_2 = 3$

Setalah dapat nilai Q maka kita kroscek berdasakan total biaya c = $\frac{1}{3}Q^3 - \frac{7}{2}Q^2 + 12Q - 5$ mana yang menghasilkan biaya minumal jadi berapa unit produksinya.

Jika Q=4 maka nilai biaya nya adalah 8,33

Jika Q=3 maka nilai bianya nya adalah 8,5

Dari perhitungan diatas maka dapat disimpulkan bahwa perusahaan akan mengularkan biaya seminimal mungkin apabila memproduksi 4 unit.

D. Latihan Soal

1.	$y = ln\,[Sin\,(x^3 + 5)]$
2.	$y = [Sin^2(x^2 - 3)]^5$
3.	$y = \ln\,[\mathrm{Cos}\,(2x^4 + 5)]$
4.	$y = [Sin^5(3x^3 - 9)]^7$
5.	$y = Cos^3(5x)$
6.	$y = Sin^2(7x)$
7.	$f(x) = 3x(x^2 - 12)$
8.	$f(x, y) = 5x^2y^3 + 2x^4y^2 - 7x^7 + 12y^7$
9.	$f(x, y) = 17x^6y^5 + x^3y^8$
10.	Suatu proyek pembengunan gedung perkulihan dapat diselesaikan dalam waktu x hari dengan biaya proyek $\left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$ ratus ribu rupiah per hari. Agar biaya minimum maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu
11.	Suatu perusahaan memproduksi x buah barang. Setiap barang yang diproduksi memberikan keungtungan $(225x - x^2)$ rupiah. Supaya total keuntungan mencapai maksimum. Banyak barang yang harus di produksi adalah ...
12.	Dari selembar karton berbentuk persegi yang berukuran sisi 18 cm akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara memotong empat bujur sangkar pada setiap bagian pojok karton. Tentukan volume maksimum dari kotak tersebut.