

# BILANGAN KOMPLEKS

## PERTEMUAN 1

## 1. Pengertian dan Bentuk Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah gabungan dari bilangan riil dan bilangan imajiner.

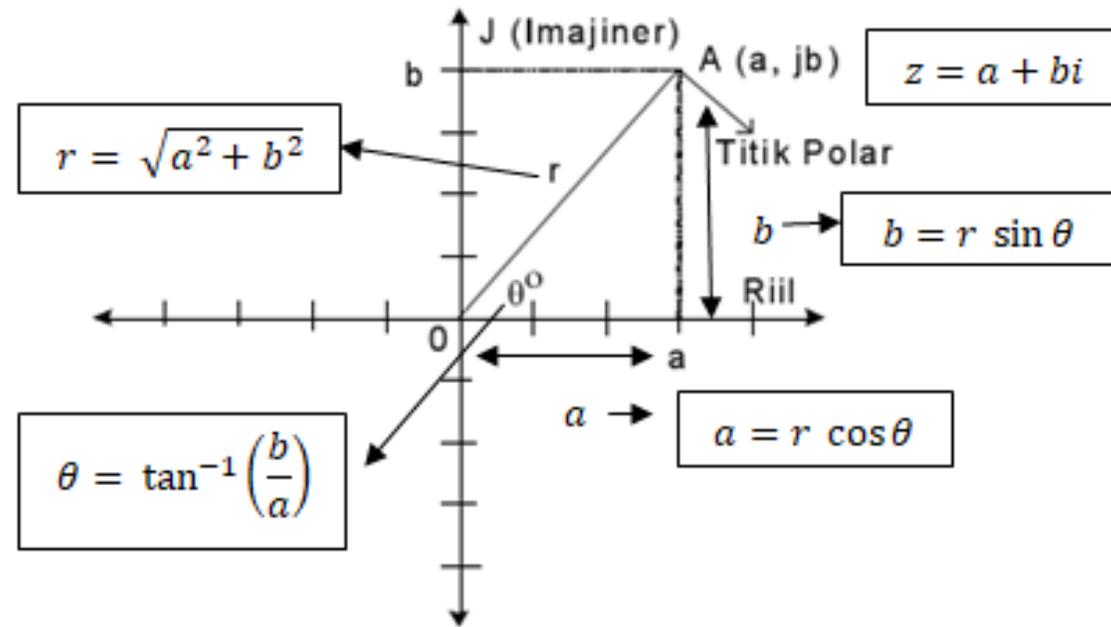
Bilangan imajiner adalah akar kuadrat dari suatu bilangan negatif. Contoh  $\sqrt{-1} = i$ , jika kita akan menghitung

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times -1} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2i$$

Bentuk penulisan bilangan kompleks ada 3 yaitu :

- a. Bentuk Rectanguler
- b. Bentuk Kutub
- c. Bentuk Eksponensial

Untuk lebih jelasnya tentang masing- masing penulisan bilangan kompleks tersebut dapat dilihat pada penjelasan gambar dibawah ini.



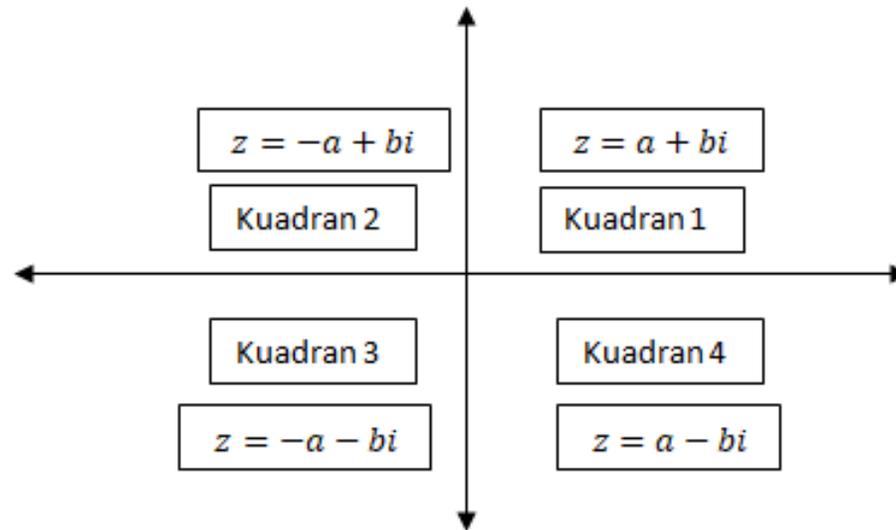
Bentuk Rectanguler :  $z = a + bi$ , dengan  $a$  sebagai real nya dan  $b$  sebagai imajenernya

Bentuk Polar :  $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$  atau

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ dengan } \theta = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$$

Bentuk Eksponen :  $z = r e^{i \theta}$

Bilangan kompleks pada masing-masing kuadran, sehingga jika ditulis kedalam bentuk kutub pada masing-masing nilai  $\theta$  yang berbeda pada setiap kuadran.



Contoh soal :

Ubahlah kedalam bentuk kutub dan eksponensial dari suatu bilangan kompleks

$$z = 2 + 2i \quad z = -2 + 2i$$

Jawab: Diketahui nilai  $a=2$  dan nilai  $b=2$

|                 |  |
|-----------------|--|
| Bentuk Kutub    | $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ <p>Mecari nilai <math>\theta = \tan^{-1} \left( \frac{2}{2} \right) = \tan^{-1} 1 = 45^\circ</math></p> <p>Karena nilai <math>a</math> nya positif dan nilai <math>b</math> nya positif maka bentuk bilangan kompleks tersebut berada di kuadran 1 sehingga penulisan bentuk kutubnya adalah <math>z = 2\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)</math></p> |
| Bentuk Eksponen | $z = r e^{i\theta}$ sehingga penulisannya menjadi $z = 2\sqrt{2} e^{45^\circ i}$ atau kita dapat merubah sudutnya menjadi kedalam bentuk $\pi$ dengan cara membaginya dengan $180^\circ$ sehingga menjadi $(45^\circ/180^\circ)\pi$ sehingga menjadi $\frac{1}{4}\pi$ . Jadi penulisannya menjadi $z = 2\sqrt{2} e^{\frac{1}{4}\pi i}$   |

## 2. Operasi Aljabar Bilangan Kompleks Bentuk Rectanguler

Misalkan  $z_1 = x_1 + iy_1$  dan  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

a. Penjumlahan :  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

b. Pengurangan :  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

c. Perkalian :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

d. Pembagian :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0$$

## 3. Operasi Aljabar Bilangan Kompleks Bentuk Eksponen

Misalkan  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  dan  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ .

a. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

b. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

c. Invers sebarang bilangan kompleks  $z = r e^{i\theta}$  yaitu

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

## Latihan Soal

1. Jika  $z = 4 + 3i$ , maka tentukan bagian real dan bagian imajiner dari  $\frac{1}{z}$ !
2. Dapatkan bentuk kutub dari bilangan kompleks  $z = -3 + 3i$ !
3. Dapatkan nilai  $(\sqrt{3} + i)^6$ !
4. Dapatkan semua akar-akar dari  $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}i$ !
5. Nyatakan  $\sin 3x$  dalam suku-suku dari  $\sin x$  dan  $\cos 3x$  dalam suku-suku dari  $\cos x$ !
6. Tentukan hasil penjumlahan dari bilangan kompleks di bawah ini
  - a.  $(4 + 7i) + (10 + 3i)$
  - b.  $(3 + 10i) + (2 + 3i)$
7. Tentukan hasil selisih dari bilangan kompleks di bawah ini
  - a.  $(4 - 5i) - (2 + 7i)$
  - b.  $(2 - 6i) - (4 + 2i)$
8. Tentukan hasil kali dari dua bilangan kompleks di bawah ini
$$(3 + 4i) \times (2 + 10i)$$
9. Tentukan hasil kali dari dua bilangan kompleks di bawah ini
$$(2 - 6i) \times (1 - 5i)$$

10 Diketahui  $z_1 = 2 + 5i$  dan  $z_2 = 3 + 4i$  Tentukanlah :

a.  $z_1 + z_2$

b.  $z_1 - z_2$

c.  $z_1 \times z_2$

d.  $z_1 : z_2$

11 Diketahui  $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$  dan  $z_2 = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$  Tentukanlah :

a.  $z_1 + z_2$

b.  $z_1 - z_2$

c.  $z_1 \times z_2$

d.  $z_1 : z_2$

12 Diketahui  $z_1 = 4e^{i 30^\circ}$  dan  $z_2 = 5e^{i 60^\circ}$  Tentukanlah :

a.  $z_1 + z_2$

b.  $z_1 - z_2$

c.  $z_1 \times z_2$

d.  $z_1 : z_2$