DERET KUASA
UJI RAIO

PERTEMUAN 4

DERET KUASA

Deret yang berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ (1)

Dinamakan deret kuasa dalam x (deret kuasa berpusat di 0)

Deret yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \ldots \qquad (2)$$

Dinamakan deret kuasa dalam *(x-b)* (deret kuasa berpusat di b)

Perhatikan bahwa deret kuasa bentuk (1) konvergen untuk x=0, sedangkan deret kuasa bentuk (2) konvergen untuk $x=b$.

Permasalahannya adalah menentukan semua nilai x sehingga deret tersebut konvergen, maka untuk menetukannya gunakan uji rasio (uji bagi mutlak) dan uji integral.

UJI RASIO

Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ adalah deret dengan suku-suku tak nol dan $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|$

i. Jika $L < 1$, deret konvergen mutlak (jadi konvergen)

ii. Jika $L > 1$, deret divergen

iii. Jika $L = 1$, pengujian ini tidak dapat memberikan kepastian

Contoh:

Tentukan himpunan semua x sehingga deret kuasa berikut konvergen

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n.2^n}$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Penyelesaian

a. Misal $a_n x^n = \frac{3^n x^n}{n+1}$, maka

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{n+2}}{\frac{3^n x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{3^n x^n}\right)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{3^n x^n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right| |3x| = |3x|$$

Dengan uji rasio:

Deret konvergen mutlak jika $|3x| < 1$ yaitu jika $|x| < \frac{1}{3}$

Divergen jika $|3x| > 1$ yaitu jika $|x| > \frac{1}{3}$

Jika $|3x| = 1$, yaitu jika $x = \pm\frac{1}{3}$ uji rasio tidak dapat digunakan, sehingga harus diperiksa langsung.

1. Jika $x = \frac{1}{3}$, maka deret menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3.\frac{1}{3}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Suatu deret harmonik yang divergen

2. Jika $x = -\frac{1}{3}$, maka deret menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3.(-\frac{1}{3})\right)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Suatu deret berayun yang konvergen

Jadi, deret kuasa konvergen jika $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$

Himpunan semua x sehingga deret kuasa tersebut konvergen pada selang $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b. Misal $a_n x^n = \frac{(-1)^n x^n}{n.2^n}$, maka

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n.2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\right)\left(\frac{n.2^n}{x^n}\right)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{x^{n+1}2^n}{2^{n+1}x^n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)\right|\left|\frac{1}{2}x\right| = \left|\frac{1}{2}x\right|$$

Dengan uji rasio maka:

Deret konvergen mutlak jika $\left|\frac{1}{2}x\right| < 1$, yaitu $|x| < 2$

Divergen jika $\left|\frac{1}{2}x\right| > 1$, yaitu $|x| > 2$

Jika $\left|\frac{1}{2}x\right| = 1$, yaitu jika $x = \pm 2$ uji rasio tidak dapat digunakan, sehingga harus diperiksa langsung

1. Jika $x = 2$, maka deret menjadi:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

   Suatu deret berayun yang konvergen

2. Jika $x = -2$, maka deret menjadi:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

   Suatu deret harmonik yang divergen

   Jadi, deret kuasa konvergen jika $-2 < x \leq 2$

   Himpunan semua x sehingga deret kuasa tersebut konvergen pada selang

   (-2,2]

c. Misal $a_n x^n = n!\, x^n$, maka

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \begin{cases} 0 \ bila\ x = 0 \\ \infty \ bila\ x \neq 0 \end{cases}$$

Dengan uji rasio:

Deret konvergen hanya untuk $x = 0$ dan divergen untuk x lainnya. Sehingga selang = $\{0\}$

Soal-saol

1. Tunjukan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergen.
2. Tunjukan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!}$ konvergen .
3. Tunjukan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergen .

4. Dengan menggunakan uji rasio, periksa apakah deret berikut konvergen atau divergen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} \dots .$$

5. Dengan menggunakan uji rasio, periksa apakah deret berikut konvergen atau divergen

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \dots + \frac{1}{n^2} \dots .$$

6. Buktikan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ konvergen .
7. Buktikan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$ konvergen .
8. Buktikan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$ konvergen .
9. Buktikan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$ konvergen .
10. Buktikan dengan uji rasio bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ konvergen .