DERET KUASA
INTEGRAL TEST

PERTEMUAN 5

DERET KUASA UJI INTEGRAL

Andaikan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ adalah deret kuasa dan andaikan $y = f(x)$ diperoleh dari penggantian n pada deret kuasa dengan peubah kontinu x, maka deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ akan konvergen jika $\int_a^{\infty} f(x)dx$ juga konvergen. Dengan kata lain,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)dx$$

Apabila limit pada ruas kanan ada dan bernilai berhingga, maka integral tak wajar tersebut **konvergen** (deret kuasa konvergen) dan memiliki nilai yang sama dengan limit tersebut. Jika nilai limitnya tidak ada atau bernilai tak hingga, maka deret kuasa tersebut **divergen**.

Contoh:

Periksalah deret berikut dengan uji integral, apakah konvergen atau divergen

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} 7n^2 e^{-n^3}$

Penyelesaian

a. Langkah pertama ubah notasi n menjadi peubah kontinu x, sehingga diperoleh $(x) = \frac{1}{x^2}$. Kita lakukan pengintegralan terhadap fungsi kontinu ini.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = -\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right] = -(0 - 1) = 1$

Integral fungsi ini bersifat konvergen (ada hasilnya dan $\neq \infty$)

Dengan demikian deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ juga konvergen.

b. Seperti pada soal sebelumnya, kita lakukan uji integral untuk memeriksa konvergen atau tidak deret berikut

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\, x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{\infty} = 2.\left(\sqrt{\infty} - \sqrt{1}\right) = \infty$$

Dengan demikian integral ini bersifat divergen karena hasilnya ∞.

Sebagai konsekuensinya, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ juga divergen.

c. Dengan menggunakan uji integral yaitu:

$$\int_1^{\infty} 7x^2 e^{-x^3} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} 7x^2 e^{-x^3} dx = \lim_{n\to\infty} -\frac{7}{3} e^{-x^3}\Big|_1^{n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{7}{3} e^{-n^3} - \frac{-7}{3} e^{-1^3} = \frac{7}{3e}$$

Jadi deret tersebut konvergen.

Soal-saol integral test

1. Tunjukan dengan integral test bahwa deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

2. Tunjukan dengan integral test bahwa deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergen.

3. Tunjukan dengan integral test bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$ konvergen.

4. Buktikan dengan integral test bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 1)^2}$ konvergen.

5. Buktikan dengan integral test bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ konvergen.

6. Buktikan dengan integral test bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1}$ konvergen.

7. Buktikan bahwa deret p konvergen jika p > 1, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \ldots\ldots$