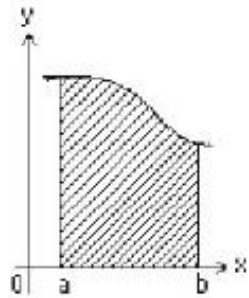


APLIKASI INTEGRAL MENENTUKAN LUAS DAERAH

PERTEMUAN 6

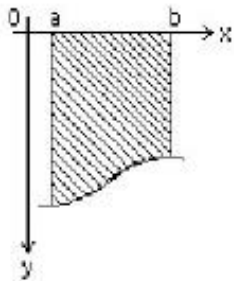
A. Luas Daerah Di Atas Sumbu - x



Jika $y = f(x) > 0$, maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$ serta sumbu- x dapat ditentukan dengan rumus :

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

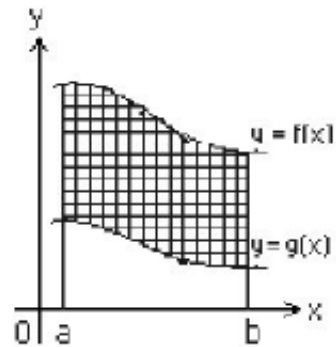
B. Luas Daerah Di Bawah Sumbu - x



Jika $y = f(x) < 0$ (kurva dibawah sumbu- x), maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$ serta sumbu- x dapat ditentukan dengan rumus :

$$L = - \int_a^b f(x) dx$$

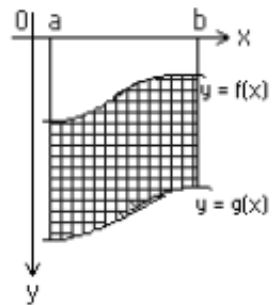
C. Luas Daerah Antara Dua Kurva di Atas Sumbu - x



Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dimana $f(x) > g(x)$ dalam interval $x = a$ dan $x = b$ dapat ditentukan dengan rumus :

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

D. Luas Daerah Antara Dua Kurva Di Bawah Sumbu- x



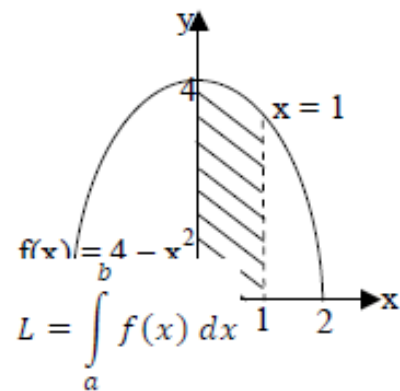
Rumus :

$$L = - \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Contoh :

1. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 4 - x^2$, garis $x = 0$, dan $x = 1$!

Pembahasan :



$$L = \int_0^1 (4 - x^2) dx$$

$$L = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$L = \left(4 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right)$$

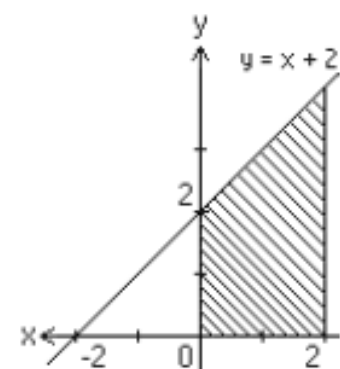
$$L = \left(4 - \frac{1}{3} \right) - 0$$

$$L = \frac{11}{3}$$

$$L = 3 \frac{2}{3} \text{ satuan luas}$$

2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x + 2$, garis $x = 0$ dan $x = 2$ serta sumbu- x !

Pembahasan :



$$L = \int_a^b f(x) dx$$

$$L = \int_0^2 (x + 2) dx$$

$$L = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2$$

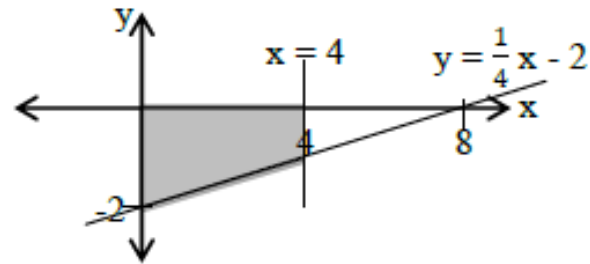
$$L = \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \right)$$

$$L = 2 + 4$$

$$L = 6 \text{ satuan luas}$$

3. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu- x , garis $x = 4$, dan sumbu- y .

Pembahasan :



$$L = - \int_a^b f(x) dx$$

$$L = - \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x - 2 \right) dx$$

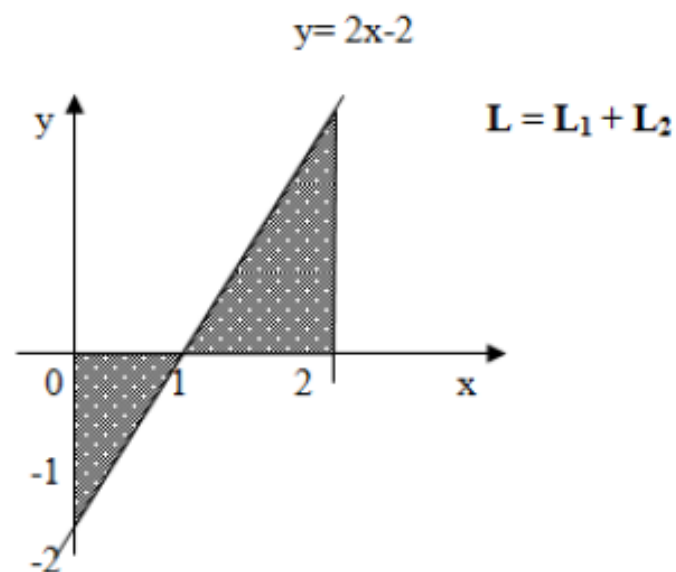
$$L = - \left[\frac{1}{8}x^2 - 2x \right]_0^4$$

$$L = - \left[\left(\frac{1}{8} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \right) \right]$$

$$L = -[(2 - 8) - 0]$$

$$L = 6 \text{ satuan luas}$$

4. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = 2x - 2$!



$$L_1 = \int_1^2 (2x - 2) dx$$

$$L_1 = [x^2 - 2x]_1^2$$

$$L_1 = (2^2 - 2 \cdot 2) - (1^2 - 2 \cdot 1)$$

$$L_1 = (4 - 4) - (1 - 2)$$

$$L_1 = 0 - (-1)$$

$$L_1 = 1$$

Jadi luasnya adalah

$$L = L_1 + L_2 = 1 + |-1| = 2 \text{ satuan luas}$$

$$L_2 = \int_0^1 (2x - 2) dx$$

$$L_2 = [x^2 - 2x]_0^1$$

$$L_2 = (1^2 - 2 \cdot 1) - (0^2 - 2 \cdot 0)$$

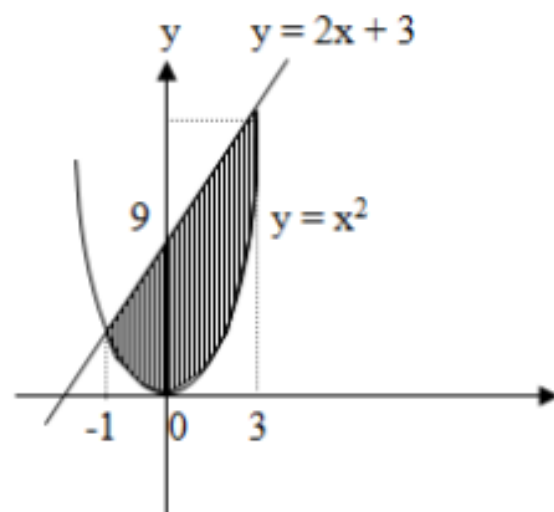
$$L_2 = (1 - 2) - (0 - 0)$$

$$L_2 = (-1)$$

$$L_2 = 1$$

5. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x + 3$!

Gambar di bawah memperlihatkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x + 3$:



Menentukan batas-batasnya

$$y_1 - y_2 = 0$$

$$x^2 - (2x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

Jadi diperoleh $x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

Menentukan batas-batasnya

$$y_1 - y_2 = 0$$

$$x^2 - (2x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

Jadi diperoleh $x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

(-1) sebagai batas bawah dan (3) sebagai batas atas

$$L = \int_{-1}^3 (2x + 3) - x^2 dx$$

$$L = \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^3$$

$$L = \left[3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 \right] - \left[(-1)^2 + 3 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right]$$

$$L = [9 + 9 - 9] - \left[1 - 3 + \frac{1}{3} \right]$$

$$L = \left[9 - \left(-2 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$L = 9 + \frac{5}{3}$$

$$L = 10\frac{2}{3} \text{ satuan luas}$$

Atau dengan menggunakan cara cepat (khusus untuk luas yang dibatasi oleh dua

kurva yang belum diketahui batas-batasnya).

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$$

Sehingga luas menjadi : $y = 2x + 3 - x^2$,

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$$

$$L = \frac{16\sqrt{16}}{6 \cdot (-1)^2}$$

$$L = \frac{64}{6 \cdot 1}$$

$$L = \frac{64}{6}$$

$$L = 10\frac{2}{3} \text{ satuan luas}$$

LATIHAN SOAL

A. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva berikut ini :

1. $y = 3x + 4$, sumbu- x , dan garis $x = 2$ dan $x = 6$.
2. $y = 3x + 4$, sumbu- x , dan garis $x = 3$ dan $x = 5$
3. $y = 6x$ dan $y^2 = x^2 - 2x$.
4. $x = 8 + 2y - y^2$, sumbu- y , dan garis $y = -1$ dan $y = 3$.
5. $y = x^3$, sumbu- x , dan garis $x = 0$ dan $x = 1$.

B. Dengan menggunakan pengintegralan hitunglah luas daerah yang diarsir berikut ini :

