

APLIKASI INTEGRAL MENCARI VOLUME BENDA PUTAR

PERTEMUAN 7

A. Mencari Volume Benda Putar dengan Metode Cakram

Secara umum, volume dinyatakan sebagai luas alas dikali tinggi. Secara matematis, ditulis:

$$V = A \cdot h$$

Kemudian, perhatikan sebuah benda bersifat bahwa penampang-penampang tegak lurus pada suatu garis tertentu memiliki luas tertentu. Misalnya garis tersebut adalah sumbu- x dan andaikan luas penampang di x adalah $A(x)$ dengan $a \leq x \leq b$. Bagi selang $[a, b]$ dengan titik-titik bagi $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$.

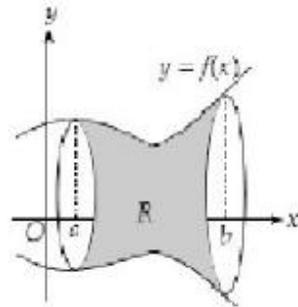
Melalui titik-titik ini, luas bidang tegak lurus pada sumbu- x , sehingga diperoleh pemotongan benda menjadi lempengan yang tipis-tipis. Volume suatu lempengan ini dapat dianggap sebagai volume tabung, yaitu $\Delta V_i \approx A(\bar{x})\Delta x_i$ dengan $x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$

Dengan jumlah yang kalian dapatkan $V = \sum_{i=1}^n A(\bar{x})\Delta x_i$, kemudian akan menjadi $V = \int_a^b A(x)dx$.

$A(x)$ adalah luas benda putar, oleh karena alas benda putar ini berupa lingkaran, maka $A(x) = \pi r^2$ dengan jari-jari yang dimaksud merupakan sebuah fungsi dalam x_i misalnya $f(x)$.

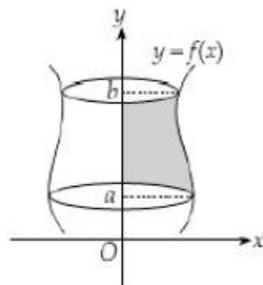
Jika daerah R adalah daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu- x , garis $x = a$ dan garis $x = b$ dengan $a < b$ jika daerah R diputar mengelilingi sumbu- x sejauh 360° maka volume benda putar tersebut adalah:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Jika daerah S adalah daerah yang dibatasi kurva $x = f(y)$, sumbu- y , garis $x = a$ dan garis $x = b$ dengan $a < b$ jika daerah S diputar mengelilingi sumbu- y sejauh 360° maka volume benda putar tersebut adalah:

$$V = \pi \int_a^b (f(y))^2 dy$$



Contoh:

- 1) Tentukanlah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu- y , dan garis $y = 3$ diputar satu putaran mengelilingi sumbu- y !

Penyelesaian:

Dalam masalah ini akan lebih mudah jika digunakan peubah integral dalam y , sehingga volume benda putar yang terbentuk dihitung dengan rumus:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Karena $y = x^3$ maka $x = y^{\frac{1}{3}}$, sehingga didapat:

$$V = \pi \int_0^3 \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^3 y^{\frac{2}{3}} dy$$

$$V = \pi \cdot \frac{3}{5} \cdot \left[y^{\frac{5}{3}}\right]_0^3$$

$$V = \pi \cdot \frac{3}{5} \cdot (3)^{\frac{5}{3}}$$

$$V = \frac{9}{5} \sqrt[3]{3^2} \pi \text{ satuan volume}$$

Jadi, volume benda putar tersebut adalah $\frac{9}{5} \sqrt[3]{3^2} \pi$ satuan volume.

2) Tentukan volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = 4 - x^2$,

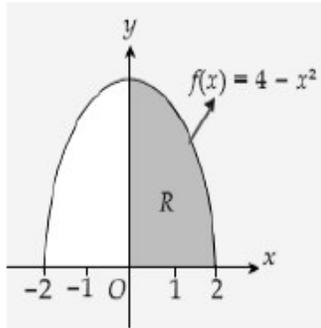
sumbu- x , dan sumbu- y diputar 360° terhadap:

a. Sumbu- x

b. Sumbu- y

Penyelesaian:

a. Gambar grafik:



Volumenya adalah

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\ &= \pi \left(\left(16(2) - \frac{8}{3}2^3 + \frac{1}{5}2^5 \right) - 0 \right) \\ &= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{256}{15} \pi \end{aligned}$$

Jadi, volumenya jika diputar mengelilingi sumbu- x adalah $\frac{256}{15} \pi$ satuan volume.

b. Untuk menentukan volume benda putar yang mengelilingi sumbu-y, maka $y = 4 - x^2$ diubah menjadi fungsi dengan variabel y , sehingga fungsinya menjadi:

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y \\ \Rightarrow x = \sqrt{4 - y}$$

Sehingga volumenya:

$$V = \pi \int_0^4 (4 - y) dy \\ = \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^4 \\ = \pi \left(\left(4 \cdot 4 - \frac{1}{2}4^2 \right) - 0 \right) \\ = \pi(16 - 8) \\ = 8\pi$$

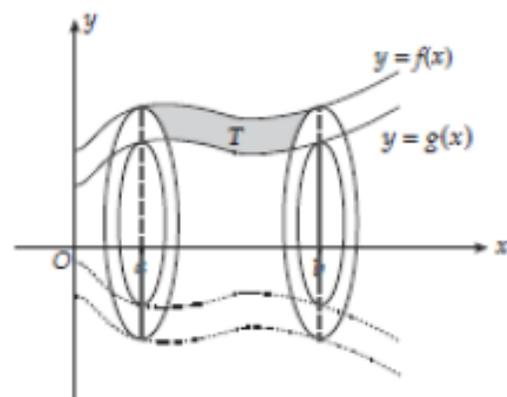
Jadi volumenya jika diputar mengelilingi sumbu-y adalah 8π satuan volume.

B. Mencari Volume Benda Putar dengan Metode Cincin

Ada kalanya pengirisan suatu benda putar menghasilkan cakram-cakram dengan lubang di tengahnya. Daerah yang demikian kita sebut cincin.

Jika daerah T dibatasi oleh kurva $f(x)$ dan $g(x)$ dengan $|f(x)| \geq |g(x)|$ yang intervalnya $[a, b]$ diputar mengelilingi sumbu- x sejauh 360° , maka volume benda putar yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$V(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 dx$$



Contoh:

- 1) Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan $y = x + 6$, diputar mengelilingi sumbu- x sebesar 360° !

Penyelesaian:

Titik potong kurva:

$$x^2 = x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$$

Titik potong di $x = 3$ dan $x = -2$

$$V = \pi \int_{-2}^3 ((x + 6)^2 - (x^2)^2) dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^3 ((x^2 + 12x + 36) - x^4) dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^3 (-x^4 + x^2 + 12x + 36) dx$$

$$V = \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + 36x \right]_{-2}^3$$

$$V = \pi \left\{ \left(-\frac{243}{5} + 9 + 54 + 108 \right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 24 - 72 \right) \right\}$$

$$V = \pi \left(-\frac{243}{5} + 171 - \frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 48 \right)$$

$$V = \pi \left(-\frac{275}{5} + \frac{8}{3} + 219 \right)$$

$$V = \pi \left(219 - 55 + \frac{8}{3} \right)$$

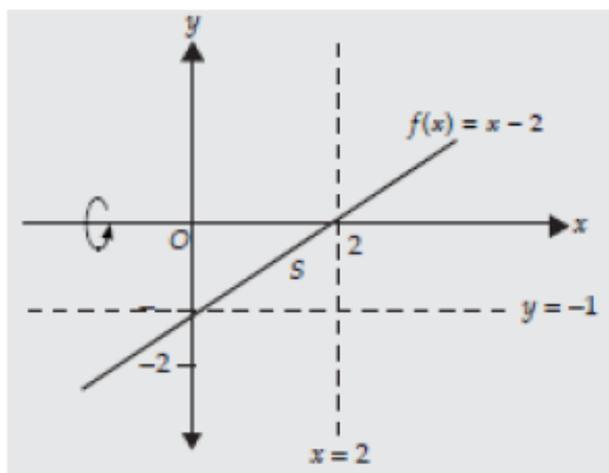
$$V = \pi \left(164 + \frac{8}{3} \right)$$

$$V = 166\frac{2}{3}\pi \text{ satuan volume}$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu- x adalah $166\frac{2}{3}\pi$ satuan volume.

- 2) Tentukan volume benda putar, jika daerah dibatasi oleh grafik $f(x) = x - 2$, sumbu- y , garis $x = 2$, dan $y = -1$ diputar 360° mengelilingi sumbu- x !

Penyelesaian:



Karena daerah yang dimaksud ada di bawah sumbu- x , maka volumenya adalah:

$$V = -\pi \int_0^2 ((-1)^2 - (x-2)^2) dx$$

$$V = -\pi \int_0^2 1 - (x^2 - 4x + 4) dx$$

$$V = -\pi \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_0^2$$

$$V = -\pi \left[\left(-\frac{8}{3} + 8 - 6 \right) - 0 \right]$$

$$V = \frac{2}{3}\pi$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu- x

C. Mencari Volume Benda Putar dengan Metode Kulit Tabung

Terdapat cara lain untuk mencari volume benda putar, yakni metode kulit tabung. Untuk banyak persoalan, metode ini lebih mudah digunakan daripada metode cakram dan cincin. Sebuah kulit tabung adalah sebuah benda yang dibatasi oleh dua tabung lingkaran tegak yang sepusat. Volume benda putar dengan metode kulit tabung dapat dicari dengan cara berikut.

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

Contoh:

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sumbu- x , $x = 1$ dan $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu- y . Tentukan volume benda yang terbentuk!

Penyelesaian:

$$V = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot 1 \right)$$

$$V = \frac{28\pi}{3}$$

Jadi, volume benda putar yang terbentuk adalah $\frac{28\pi}{3}$ satuan volume.

LATIHAN SOAL

Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui diputar 360° mengelilingi sumbu yang ditunjukkan!

1. $y = \frac{x^2}{\pi}, x = 4, y = 0$; mengelilingi sumbu- x
2. $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$; mengelilingi sumbu- y .
3. $y = x^2, x = 1, y = 0$; mengelilingi sumbu- y .
4. $y = \sqrt{x}, x = 3, y = 0$; mengelilingi sumbu- y .
5. $y = 9 - x^2 (x \geq 0), x = 0, y = 0$; mengelilingi sumbu- y .
6. $y = \sqrt{x}, x = 5, y = 0$; mengelilingi garis $x = 5$.
7. $y = 9 - x^2 (x \geq 0), x = 0, y = 0$; mengelilingi garis $x = 3$.
8. $y = \frac{1}{4}x^3 + 1, y = 1 - x, x = 1$; mengelilingi sumbu- y .
9. $y = x^2, y = 3x$; mengelilingi sumbu- y .
10. $x = y^{\frac{2}{3}}, y = 27, x = 0$; mengelilingi sumbu- y .
11. $x = \frac{2}{y}, y = 2, y = 6, x = 0$; mengelilingi sumbu- y .
12. $x = y^2, y = 1, x = 0$; mengelilingi sumbu- x .
13. $x = y^2, y = 2, x = 0$; mengelilingi garis $y = 2$.
14. $y = 6x$ dan $y = 6x^2$; mengelilingi sumbu- x .
15. $x - 2y = 0$ dan $y^2 = 4x$; mengelilingi sumbu- x .