

PERSAMAAN DIFERENSIAL VARIABEL TERPISAH

PERTEMUAN 9

PERSAMAAN DIFERENSIAL YANG DAPAT DIPISAHKAN

PD yang dapat dipisahkan ini cara mengerjakannya adalah dengan persamaan fungsi y dengan dy dan persamaan fungsi x dengan dx lalu dibuat sama dengan nol atau dapat ditulis :

$$f(y)dy + g(x)dx = 0$$

Apabila telah dikelompokkan tersebut maka dapat dilakukan integrasi dengan mengintegalkan semua komponennya yaitu :

$$\int f(y)dy + \int g(x)dx = \int 0 \text{ sehingga } \int f(y)dy + \int g(x)dx = C$$

Contoh :

1. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y dy = e^x dx$$

$$e^y dy - e^x dx = 0$$

Lalu diintegrasikan

$$\int e^y dy - \int e^x dx = \int 0$$

$$e^y - e^x = C$$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$

Jawab :

$$xy dy = dx$$

$$y dy = \frac{dx}{x}$$

$$y dy - \frac{1}{x} dx = 0$$

Lalu diintegrasikan

$$\int y dy - \int \frac{1}{x} dx = \int 0$$

$$\frac{1}{2}y^2 - \ln x = C$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln x + C$$

$$y^2 = 2(\ln x + C)$$

$$y = \sqrt{2(\ln x + C)}$$

$$3 \quad x \, dx + y \, dy = 0$$

Penyelesaian :

karena peubahnya sudah terpisah, maka langsung bisa diintegrasikan

$$\int x \, dx = \int y \, dy$$

$$\frac{1}{2}x^2 + c_1 = \frac{1}{2}y^2 + c_2$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = c_2 - c_1$$

$$x^2 + y^2 = 2(c_2 - c_1)$$

$$x^2 + y^2 = c, \text{ dengan } c = 2(c_2 - c_1)$$

$$4 \quad 9yy' + 4x = 0$$

Penyelesaian :

$$9yy' + 4x = 0$$

$$9y \frac{dy}{dx} = -4x$$

$$9y \, dy = -4x \, dx$$

$$\int 9y \, dy = \int -4x \, dx$$

$$\frac{9}{2}y^2 + c_1 = -2x^2 + c_2 \text{ [bagi 18]}$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{c_1}{18} = -\frac{x^2}{9} + \frac{c_2}{18}$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = C, \text{ dengan } C = \frac{c_2 - c_1}{18}$$

$$5 \quad (1 - y)y' = x^2$$

Penyelesaian :

$$(1 - y)y' = x^2$$

$$(1 - y) \frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int (1 - y) dy = \int x^2 dx$$

$$\int (1 - y) \frac{d(1-y)}{-1} = \int x^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}(1 - y)^2 + c_1 = \frac{1}{3}x^3 dx + c_2$$

$$-\frac{1}{2}(1 - y)^2 - \frac{1}{3}x^3 dx = c_2 - c_1$$

$$(1 - y)^2 + x^3 dx = -6(c_2 - c_1)$$

$$(1 - y)^2 + x^3 dx = c, \text{ dengan } c = -6(c_2 - c_1)$$

$$6 \quad 2x dx - (y + 1) dy = 0$$

Penyelesaian :

$$2x dx = (y + 1) dy$$

$$\int 2x dx = \int (y + 1) dy$$

$$x^2 + c_1 = \frac{1}{2}(y + 1)^2 + c_2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}(y + 1)^2 = c_2 - c_1$$

$$2x^2 - (y + 1)^2 = 2(c_2 - c_1)$$

$$2x^2 - (y + 1)^2 = c, \text{ dengan } c = 2(c_2 - c_1)$$

7 $y \, dx + (1 + x^2) \, dy = 0$, dengan $y \neq 0$

Penyelesaian :

$$y \, dx + (1 + x^2) \, dy = 0 \text{ [bagi dengan } y \cdot (1 + x^2)\text{]}$$

$$\frac{1}{(1+x^2)} dx + \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)} dx + \int \frac{1}{y} dy = C$$

$$\text{arc tan } x + \ln y = C$$

NOTE : $\int \frac{1}{(1+x^2)} dx = \text{arc tan } x$

8 $2(y + 3) \, dx - xy \, dy = 0$

Penyelesaian :

$$2(y + 3) \, dx - xy \, dy = 0 \text{ [bagi dengan } (y + 3) \cdot x\text{]}$$

$$\frac{2}{x} dx + \frac{y}{y+3} dy = 0$$

$$\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{y}{y+3} dy = C$$

$$2 \ln x + \int \frac{y+3-3}{y+3} dy = C$$

$$2 \ln x + \int \frac{y+3}{y+3} dy - \int \frac{3}{y+3} dy = C$$

$$2 \ln x + y - \int \frac{3}{y+3} \frac{d(y+3)}{1} = C$$

$$2 \ln x + y - 3 \ln (y + 3) = C$$

$$\ln x^2 + y - \ln (y + 3)^3 = C$$

Soal-soal :

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy^2}{x^2y - x^2}$

3. $xy \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{y + 1}$

4. $y \tan x \frac{dy}{dx} = (4 + y^2) \sec^2 x$

5. $\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$

6. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$

7. $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0$

8. $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

9. $y^2 dy = (x + 3x^2) dx$

10. $xyy' + x^2 + 1 = 0$