PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK

PERTEMUAN 10

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Dikatakan eksak jika fungsi $Q(x,y)$ sedemikian sehingga $\frac{\partial Q}{\partial x} = M(x,y) dan \ \frac{\partial Q}{\partial x} =$ $N(x,y)$. Dengan mengingat diferensial total dari fungsi $Q(x,y)$, maka disimpulkan bahwa persamaan

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah eksak jika dan hanya jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Eksak adalah sebagai berikut:

Langkah 1 Tulis PD dalam bentuk $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Langkah 2 Uji ke Eksakan PD

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(Turunkan fungsi M(x,y) terhadap y dan Turunkan fungsi N(x,y) terhadap x lalu dilihat hasilnya sama atau tidak jika sama maka dia dikatakan eksak dan jika tidak sama maka dia tidak eksak)

Langkah 3 Jika Eksak, integralkan M(x,y) terhadap x atau N(x,y) terhadap y (pilih salah satu) Misal kita pilih adalah M, maka:

$$Q(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$$

Langkah 4 Turunkan fungsi Q terhadap y dan samakan hasilnya dengan N(x,y)

$$N(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y} \ atau\ menjadi$$

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right) + g'(y)$$

Langkah 5 Integralkan $g'(y)$ untuk memperoleh $g(y)$

Langkah 6 Tuliskan C jika diberikan kondisi awal tertentu

Contoh soal

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-2y)}{y^2-2x} \; dengan \; y(0) = 3$$

Langkah 1 $(y^2 - 2x)dy = -(x - 2y)dx$

$(y^2 - 2x)dy + (x - 2y)dx = 0$

$(x - 2y)dx + (y^2 - 2x)dy = 0$

Langkah 2 Uji Ke Eksakan

$M(x,y) = (x - 2y)$

$N(x,y) = (y^2 - 2x)$

Turunkan $M(x,y)$terhadap y dan Turunlan $N(x,y)$terhadap x.

Sehingga diperoleh hasil

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -2$

Karena hasilnya sama maka dikatakan Eksak

Langkah 3 Misalkan dipilih M(x,y) untuk di integralkan

$Q(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$

$Q(x,y) = \int (x - 2y)dx + g(y)$

$Q(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy + g(y)$

Langkah 4 Turunankan $Q(x, y)$ terhadap y dan disamakan dengan $N(x, y)$

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y)$$

$$y^2 - 2x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 - 2xy\right) + g'(y)$$

$$y^2 - 2x = 0 - 2x + g'(y)$$

$$g'(y) = y^2 - 2x + 2x$$

$$g'(y) = y^2$$

Langkah 5 Integralkan $g'(y)$ untuk memperolej $g(y)$

$$g(y) = \int g'(y)dy$$

$$g(y) = \int y^2 dy$$

$$g(y) = \frac{1}{3}y^3$$

Langkah 6 Penyelesaian umum dalam bentuk $Q(x, y) = C$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + g(y) = C$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 = C$$

Langkah 7 Dengan kondisi awal $y(0) = 3$ diperoleh C=-9 dari

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 = C$$

$$\frac{1}{2}0^2 - 2(o)(3) + \frac{1}{3}(3)^3 = C$$

$$C = -9$$

Langlah 8 Sehinga bentuk penyelesaiann ya adalah:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 = -9$$

Contoh Soal 2	
$(2xy + x^2)\,dx + (x^2 + y^2) = 0$	
Langkah 1	buktikan persamaan differensial eksak. $M(x,y) = (2xy + x^2) = 2y\ dan$ $N(x,y) = (x^2 + y^2) = 2y$ Nilai di atas = 0, maka persamaan differensial diatas merupakan persamaan diferensial eksak
Langkah 2	Selesaian PD di atas adalah F(x,y) = C. Untukmendapatkan F(x,y) = C dapatdigunakankesamaan: $= N(x,y)\ dan = M(x,y).$ $= (x^2 + y^2)$ $F(x,y) =$ $= x^2y + 2y + F(x)$ $= M(x,y).$ $x^2y + 2y + F(x)) = 2xy + x^2$ $2xy + F'(x) = 2xy + x^2$ $F'(x) = x^2$ $F(x) = +C$ $persamaanya\ adalah\ F(x,y) = C$

Soal-soal

1. $(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$

2. $(x + e^{-x} \sin y)dx - (y + e^{-x} \cos y)dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(x + 2y)}{y^2 + 2x}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(3x^2 + 4xy)}{2x^2 + 2y}$ $dengan\ y(0) = 3$

5. $(9x^2 + y - 1)\, dx - (4y - x)dy = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Cos\ y}{x\ Sin\ y - y^2}$

7. $(xe^y - e^{2y})dy - (e^y + x)dx = 0$

8. $(e^x\ Sin\ y - 2y\ Sin\ x)dx + (e^x Cos\ y + 2\ Cos\ x)dy = 0$

9. $(x^2 - 2xy)dy - (y^2 - 2xy + 1)dx = 0$

10 $3x^2y^2\, dx + (2x^3y + 4y^3)\, dy = 0$