PERSAMAAN DIFERENSIAL NON EKSAK

PERTEMUAN 11

Bentuk umum $M(x,y)d \quad + N(x,y)d \quad = 0$

disebut persamaan differensial tidak eksak jika $\frac{\partial}{\partial} \neq \frac{\partial}{\partial}$

Suatu persamaan differensial yang tidak eksak tetap dapat dijadikan eksak (dieksakan), tetapi tidak semua persamaan differensial dapat dijadikan eksak. Kemungkinan suatu persamaan differensial dapat dieksakan yaitu mengalikan persamaan differensial tersebut dengan suatu fungsi yang tidak nol (faktor integrasi). Selanjutnya jika sudah eksak, maka penyelesaian sama seperti teknik sebelumnya (persamaan differensial eksak).

Definisi Faktor Integrasi

Suatu fungsi $I(x,y)$ yang tidak nol dikatakan faktor integrasi dari

$M(x,y)d \quad + N(x,y)d \quad = 0$ jika persamaan differensial

$I(x,y)M(x,y)d \quad + I(x,y)N(x,y)d \quad = 0$ eksak.

Teorema:

Persamaan differensial $M(x, y)d \quad + N(x, y)d \quad = 0$

Maka berlaku:

1. Mempunyai faktor integrasi yang hanya bergantung pada x , jika dan hanya jika

$$\frac{\frac{\partial}{\partial} - \frac{\partial}{\partial}}{N} = f(x)$$

   Suatu fungsi yang hanya bergantung pada x. Dalam hal ini faktor integrasinya adalah

$$I(x) = e^{\int f(x)d}$$

2. Mempunyai faktor integrasi yang hanya bergantung pada y jika dan hanya jika

$$\frac{\frac{\partial}{\partial} - \frac{\partial}{\partial}}{M} = g(x)$$

   Suatu fungsi yang hanya bergantung pada y. Dalam hal ini faktor integrasinya adalah

$$I(y) = e^{-\int g(y)d}$$

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Uji keeksakan $\frac{\partial}{\partial} = \frac{\partial}{\partial}$
2. Jika tidak eksak, maka carilah fungsi $I(x,y)$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial} - \frac{\partial}{\partial}}{N} = f(x)$$

3. Ubahlah persamaan differensial menjadi

$$I(x,y)M(x,y)d \quad + I(x,y)N(x,y)d \quad = 0$$

4. Selesaikan persamaan differensial yang sudah dieksakan seperti penyelesaian persamaan differensial eksak

Contoh Soal

Selesaikan persamaan differensial berikut

$(9y^2 + 2xy^3)d \quad + (9x \quad + 2x^2y^2)d \quad = 0$ dengan faktor integrasi dari fungsi x

Penyelesaian:

1. Uji keeksakan

$$\frac{\partial}{\partial} = \frac{\partial(9y^2+2xy^3)}{\partial} = 18y + 6xy^2$$

$$\frac{\partial}{\partial} = \frac{\partial(9x \quad +2x^2y^2)}{\partial} = 9y + 4xy^2$$

$\frac{\partial}{\partial} \neq \frac{\partial}{\partial}$ persamaan differensial tidak eksak

2. Faktor integrasi dari fungsi x, maka

$$\frac{\frac{\partial}{\partial} - \frac{\partial}{\partial}}{N} = f(x)$$

$$\frac{(1 \quad y+6xy^2)-(9y+4xy^2)}{9x \quad +2x^2y^2} = f(x)$$

$$\frac{9y+2xy^2}{9x \quad +2x^2y^2} = f(x)$$

$$\frac{(9y+2xy^2)}{x(9y+2xy^2)} = f(x)$$

$$\frac{1}{x} = f(x)$$

$$I(x) = e^{\int f(x)d}$$

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{x} d}$$

$$I(x) = e^{l\imath\,|x|}$$

$$I(x) = x$$

3. Persamaan differensial eksak menjadi:
   $I(x,y)M(x,y)d \quad + I(x,y)N(x,y)d \quad = 0$
   $x(9y^2 + 2xy^3)d \quad + x(9x \quad + 2x^2y^2)d \quad = 0$
   $(9xy^2 + 2x^2y^3)d \quad + (9x^2y + 2x^3y^2)d \quad = 0$
4. Uji keesakan dari Persamaan differensial baru
   $\frac{\partial}{\partial} = \frac{\partial(9xy^2+2x^2y^3)}{\partial} = 18x \quad + 6x^2y^2$
   $\frac{\partial}{\partial} = \frac{\partial(9x^2y+2x^3y^2)}{\partial} = 18x \quad + 6x^2y^2$
   $\frac{\partial}{\partial} = \frac{\partial}{\partial}$ eksak
5. $Q(x,y) = \int M(x,y)d \quad + g(y)$
   $Q(x,y) = \int (9xy^2 + 2x^2y^3)d \quad + g(y)$
   $Q(x,y) = \frac{9}{2}x^2y^2 + \frac{2}{3}x^3y^3 + g(y)$
6. $N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}$
   $9x^2y + 2x^3y^2 = \frac{\partial\left(\frac{9}{2}x^2y^2+\frac{2}{3}x^3y^3+g(y)\right)}{\partial}$
   $9x^2y + 2x^3y^2 = 9x^2y + 2x^3y^2 + g'(y)$
   $0 = g'(y)$
7. $\int g'(y) = \int 0d$
   $g(y) = 0$
8. $Q(x,y) = C$
   $\frac{9}{2}x^2y^2 + \frac{2}{3}x^3y^3 = C$

Soal-saol

1. $(4xy + 3y^2 - x)dx + x\,(x + 2y)dy = 0$

2. $y\,(x + y + 1)dx + x\,(x + 3y + 2)dy = 0$

3. $(2x^3y^2 - y)dx + x\,(2x^2y^3 - x)dy = 0$

4. $(9y^2 + 2xy^3)dx + x\,(9xy + 2x^2y^2)dy = 0$

5. $(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)dx + 2\,(y^3 + x^2y + x)dy = 0$

6. $y(2xy + 1)dx + x\,(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$

7. $y(x + y)dx + x\,(x + 2y - 1)dy = 0$

8. $(x^2 + y + y^2)dx - xdy = 0$

9. $(xy + 1)dx + x\,(x + 4y - 2)dy = 0$

10. $dx - 2xydy = 0$