

# PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER

PERTEMUAN 12

Bentuk umum :  $a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x)$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_2(x)}{a_1(x)} y = \frac{b(x)}{a_1(x)}$$

misalkan  $\frac{a_2(x)}{a_1(x)} = P(x)$  dan  $\frac{b(x)}{a_1(x)} = Q(x)$

Sehingga  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut :

Langkah 1 Buat persamaan diferensial kedalam bentuk umum

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Langkah 2 Tentukan  $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

Langkah 3 Kalikan  $Q(x)$  dengan  $\mu(x)$  dan diintegrasikan

$$\int Q(x) \cdot \mu(x) dx$$

Langkah 4 Tentukan penyelesaian umum

$$\mu(x) y = \int Q(x) \cdot \mu(x) dx$$

$$y = \frac{\int Q(x) \cdot \mu(x) dx}{\mu(x)}$$

### Contoh 1

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 2$$

Langkah 1  $a_1(x) = x^2$  dan  $a_2(x) = x$  serta  $b(x) = 2$  sehingga didapat

$$P(x) = \frac{1}{x} \text{ dan } Q(x) = \frac{2}{x^2}$$

Sehingga bentuk persamaannya menjadi :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{2}{x^2}$$

Langkah 2 Tentukan  $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\ln x}$$

$$\mu(x) = x$$

Langkah 3 Kalikan  $Q(x)$  dengan  $\mu(x)$  dan diintegrasikan

$$\int Q(x) \cdot \mu(x) dx$$

$$\int \frac{2}{x^2} x dx$$

$$2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$2 \ln x + C$$

Langkah 4 Tentukan penyelesaian umum

$$y = \frac{\int Q(x) \cdot \mu(x) dx}{\mu(x)}$$

$$y = \frac{2 \ln x + C}{x}$$

### Contoh 2

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$$

Langkah 1  $a_1(x) = \cos x$  dan  $a_2(x) = \sin x$  serta  $b(x) = 1$  sehingga didapat

$$P(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \text{ dan } Q(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Sehingga bentuk persamaannya menjadi :

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

Langkah 2 Tentukan  $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$

$$\mu(x) = e^{\int \tan x dx}$$

$$\mu(x) = e^{\ln \sec x}$$

$$\mu(x) = \sec x$$

Langkah 3 Kalikan  $Q(x)$  dengan  $\mu(x)$  dan diintegrasikan

$$\int Q(x) \cdot \mu(x) dx$$

$$\int \sec x \sec x dx$$

$$\int \sec^2 x dx$$

$$\tan x + C$$

Langkah 4 Tentukan penyelesaian umum

$$y = \frac{\int Q(x) \cdot \mu(x) dx}{\mu(x)}$$

$$y = \frac{\tan x + C}{\sec x}$$

$$y = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + C}{\frac{1}{\cos x}}$$

$$y = \left( \frac{\sin x}{\cos x} + C \right) \cos x$$

$$y = \sin x + C \cos x$$

**Soal-soal**

1.  $(x + 2y^3) \frac{dy}{dx} = y$

2.  $x \frac{dy}{dx} + y = e^x$

3.  $\frac{dy}{dx} + (\tan x) y = \cos^2 x$

4.  $x^2 dy + xy dy = (x - 1)^2 dx$

5.  $2 \frac{dy}{dx} - y = x e^{x/2}$

6.  $x \frac{dy}{dx} - y = 2x \ln x$

7.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x^3 e^x - 1$

