

# PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINIER

PERTEMUAN 13

Persamaan differensial yang bukan persamaan differensial linier

Dengan demikian persamaan differensial  $F(x, y', \dots, y^{(m)}) = 0$  adalah persamaan differensial tak linier, jika salah satu dari berikut dipenuhi oleh  $F$  :

- $F$  tidak berbentuk polinom dalam  $y, y', \dots, y^{(m)}$
  - $F$  tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari 2 dalam  $y, y', \dots, y^{(m)}$
1.  $yy' + xy'' = 0$  ; persamaan diferensial tak linier karena  
 $F(x, y, y', y'') = yy' + xy''$  polinom berpangkat dua dalam  $y, y', y''$ .
  2.  $\sin xy \frac{dy}{dx} + \cos \frac{d^2y}{dx^2} = 0$  ; tak linier karena  $F$  tak berbentuk polinom dalam  
 $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

Misal :

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) y^n \dots\dots\dots (1)$$

Disebut persamaan differensial non linier.

Pemecahan dilakukan dengan memisalkan :  $Z = y^{-n+1} \dots\dots\dots (2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ karena } \frac{dz}{dy} = (-n+1)y^{-n}, \text{ maka}$$

$$\text{didapat : } \frac{dz}{dx} = (-n+1) y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-n+1} y^n \frac{dz}{dx} \dots\dots\dots (3)$$

Dari (1), (2) dan (3) maka diperoleh :

$$\frac{1}{-n+1} y^n \frac{dz}{dx} + P(x) y = Q(x) y^n, \text{ kalikan dengan } y^{-n} \text{ sehingga didapat}$$

$$\frac{1}{-n+1} \frac{dz}{dx} + P(x) y^{-n+1} = Q(x) \text{ kalikan dengan } (-n+1) \text{ sehingga didapat}$$

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1) P(x) y^{-n+1} = (-n+1) Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1) P(x) \cdot Z = (-n+1) Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + H(x) \cdot z = W(x) \Rightarrow \text{persamaan differensial inier.}$$

Dengan memisalkan  $z = uv$  maka persamaan differensial dapat diselesaikan.

Contoh soal :

1.  $\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} + \underbrace{P(x)}_1 y = \underbrace{Q(x)}_x y^3 \Rightarrow$  persamaan differensial non linier

Misalkan  $z = y^{-n+1}$  sehingga  $z = y^{-3+1}$  atau  $z = y^{-2}$ , dengan demikian maka

$$\frac{dz}{dx} - 2y^{-2} = -2x$$

$$\frac{dz}{dx} - 2z = -2x$$

Mis :  $z = uv \Rightarrow u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - 2uv = -2x$

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[ \frac{du}{dx} - 2u \right] = -2x$$

Pilihlah  $u$  sedemikian rupa sehingga :

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2 dx$$

$\ln u = 2x + C_1$ , ambil  $C_1 = 0$  sehingga didapat

$$\boxed{u = e^{2x}}$$

$$u \frac{dv}{dx} = -2x \Rightarrow e^{2x} \frac{dv}{dx} = -2x$$

$$dv = -2x e^{-2x} dx$$

$$v = \int x d e^{-2x}$$

$$v = x e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$= e^{-2x} (x + 1/2) + C$$

$$\therefore Z = e^{2x} [e^{-2x} (x + 1/2) + C]$$

$$y^{-2} = x + \frac{1}{2} + C e^{2x}$$

2.  $\frac{1}{y^6} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy^5} = x^2$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2 y^6 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \left( \frac{1}{x} \right) y = (x^2) y^6 \rightarrow \text{pers. differensial non linier}$$

Dengan memisalkan :  $z = y^{-5}$  maka didapat :

$$\frac{dz}{dx} - 5 \frac{z}{x} = -5x^2 \rightarrow \text{persamaan differensial linier}$$

Persamaan differensial diselesaikan dengan mengambil  $z = uv$

Soal-soal :

1.  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0$

2.  $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$

3.  $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{xy^2}{1-x^2}$

4.  $\frac{d^4y}{d^4x} + y^4 = 0$

5.  $y' + xy^5 = 0$

6.  $y' + \frac{x}{y} = 0$

7.  $yy''' + xy' + y = x^2$

8.  $xy' + y = \sqrt{y}$

9.  $y'' + \sqrt{y'} + y = x^2$

10.  $y' = x (\sin y) + e^x$

