

PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN

PERTEMUAN 14

DIFERENSIAL HOMOGEN

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cara termudah untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Homogen dengan

mendefinisikan variabel baru yaitu $z = \frac{y}{x}$ atau $y = zx$. Dan Persamaan Diferensial

menjadi

$$x \frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

Dimana ruas kiri Persamaan Diferensial ini diperoleh dengan menerapkan aturan

rantai

$$y = zx : \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} \text{ sehingga } x \frac{dz}{dx} + z$$

Dalam bentuk ini kita selalu akan memisahkan variabel-variabelnya

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}$$

Yang dengan mudah kita dapat menyelesaikan persamaan diferensial diatas dengan

mengintegrasikan kedua ruas.

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

Jawab

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2y}{x}$$

misalkan $z = \frac{y}{x}$ Sehingga menjadi

$$x \frac{dz}{dx} + z = z^2 + 2z$$

$$x \frac{dz}{dx} = z^2 + 2z - z$$

$$x \frac{dz}{dx} = z^2 + z$$

$$x dz = (z^2 + z) dx$$

$$\frac{dz}{z(z+1)} = \frac{dx}{x}$$

Lalu kedua ruas di integralkan

$$\int \frac{1}{z(z+1)} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\dots \dots \dots = \ln x + C$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

Jawab

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x}$$

misalkan $z = \frac{y}{x}$ Sehingga menjadi

$$x \frac{dz}{dx} + z = 1 + z$$

$$x \frac{dz}{dx} = 1 + z - z$$

$$x \frac{dz}{dx} = 1$$

$$dz = \frac{1}{x} dx$$

Lalu kedua ruas diintegalkan

$$\int 1 dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$z = \ln x + C$$

Kembali lagi $z = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = \ln x + C$$

$$y = x \ln x + C$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{2x}$$

Jawab

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2x} + \frac{3y}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{3y}{2x}$$

misalkan $z = \frac{y}{x}$ Sehingga menjadi

$$x \frac{dz}{dx} + z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z - z$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}(1 + z)$$

$$2x dz = (1 + z) dx$$

$$\frac{2}{(1 + z)} dz = \frac{1}{x} dx$$

Lalu kedua ruas diintegalkan

$$\int \frac{2}{(1 + z)} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$2 \int \frac{1}{(1 + z)} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$2 \ln(1 + z) = \ln x + C$$

$$2 \ln \left(1 + \frac{y}{x} \right) = \ln x + C$$

$$\left(1 + \frac{y}{x} \right)^2 = x + C$$

$$\left(1 + \frac{y}{x} \right) \left(1 + \frac{y}{x} \right) = x + C$$

$$1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{y^2}{x^2} = x + C$$

Lalu semua ruas dikalikan x^2

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^3 + C$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - x^3 = C$$

Soal-Soal

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$$

$$4. \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2y - y^3}{x^3 - 2xy^2}$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

$$6. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

$$7. \frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$$

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2}$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

