

PERSAMAAN DIFERENSIAL NON HOMOGEN

PERTEMUAN 15

PERSAMAAN DIFERENSIAL NON HOMOGEN

Bentuk umum persamaan differensial non Homogen

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = f(x)$$

Langkah-langkah penyelesaiannya

1. Cari solusi untuk $f(x) = 0$, sehingga penyelesaian menggunakan persamaan differensial homogen, diperoleh y_h sebagai solusinya:

$$y_h = C_1 U_1(x) + C_2 U_2(x) + \dots + C_n U_n(x)$$

Dengan C_1, C_2, \dots, C_n adalah konstanta.

$U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)$ merupakan sebuah fungsi dalam bentuk $e^{kx}, xe^{kx}, e^{\alpha} \cos \beta x, e^{\alpha} \sin \beta x$

2. Tentukan suatu solusi khusus y_p terhadap persamaan differensial non homogen tersebut. Bentuk-bentuk penentuan y_p berdasarkan penyelesaian *trial-error*

i. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 4y = 3x^2 + 2$, maka $y_p = Ax^2 + Bx + C$

ii. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 6$, maka $y_p = \frac{f(x)}{a_n}$

iii. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 4y = e^{2x}$, maka $y_p = B e^{2x}$

iv. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 2 \sin x$, maka $y_p = B \sin x + C \cos x$

3. Jumlahkan solusi 1 dan 2 menjadi solusi umum $y = y_h + y_p$

Contoh Soal

1. Selesaikan persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 6$

Jawab:

i. Solusi $f(x) = 0$, sehingga:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Persamaan karakteristiknya misal $\frac{d}{dx} = k$, maka

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

$$(k + 3)(k - 1) = 0$$

$$k_1 = -3 \quad k_2 = 1$$

Solusi persamaan homogenya adalah

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$$

ii. Solusi khusus y_p

$$y_p = \frac{f(x)}{a_n} = \frac{6}{-3} = -2$$

iii. $y = y_h + y_p$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - 2$$

2. Selesaikan persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2y = 2x^2 - 10x + 3$

Jawab:

i. Solusi $f(x) = 0$, sehingga:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2y = 0$$

Persamaan karakteristiknya missal $\frac{d}{dx} = k$, maka

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$(k + 2)(k - 1) = 0$$

$$k_1 = -2 \quad k_2 = 1 \text{ sehingga}$$

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

ii. Solusi khusus $y_p = Ax^2 + B + C$ substitusi y_p ke persamaan

diferensial, sehingga $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2y = 2x^2 - 10x + 3$

$$\frac{d^2(Ax^2 + B + C)}{dx^2} + \frac{d(Ax^2 + B + C)}{dx} - 2(Ax^2 + B + C) = 2x^2 - 10x + 3$$

$$2A + 2A + b - 2Ax^2 - 2B - 2C = 2x^2 - 10x + 3$$

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + b - 2C) = 2x^2 - 10x + 3$$

$$-2A = 2 \Leftrightarrow A = -1$$

$$2A - 2B = -10 \Leftrightarrow B = 4$$

$$2A + B - 2C = 3 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi } y_p = -x^2 + 4x - \frac{1}{2}$$

iii. $y = y_h + y_p$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - x^2 + 4x - \frac{1}{2}$$

3. Selesaikan persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 + x$

Jawab:

i. Solusi $f(x) = 0$, sehingga:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Persamaan karakteristiknya misal $\frac{d}{dx} = k$, maka

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k - 1)(k - 1) = 0$$

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 1$$

Karena akar-akar kembar, maka solusi persamaan diferensial homogenya:

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + x C_2 e^{k_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^x + x C_2 e^x$$

ii. Solusi khusus $y_p = Ax^2 + Bx + C$ substitusi y_p ke persamaan

diferensial, sehingga $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 + x$

$$\frac{d^2(Ax^2 + Bx + C)}{dx^2} - 2\frac{d(Ax^2 + Bx + C)}{dx} + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x$$

$$2A - 4A - 2B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x$$

$$Ax^2 + (-4A + B)x + (2A - 2B + C) = x^2 + x$$

$$A = 1$$

$$-4A + B = 1 \leftrightarrow B = 5$$

$$2A - 2B + C = 0 \leftrightarrow C = 8$$

Sehingga $y_p = x^2 + 5x + 8$

iii. $y = y_h + y_p$

$$y = C_1 e^x + x C_2 e^x + x^2 + 5x + 8$$

$$y = (C_1 + x C_2) e^x + x^2 + 5x + 8$$

Soal-soal

1. $(y + 1)dx + (2x - 3)dy = 0$
2. $(7y + 1)dx + (2x - 3)dy = 0$
3. $(x + 2y - 4)dx - (2x - 4y)dy = 0$
4. $(x + y + 1)dx + (3x + 2y + 2)dy = 0$
5. $(3x + 2y + 3)dx - (x + 2y - 1)dy = 0, y(0) = 1$
6. $(x + 7)dx + (2x + y + 3)dy = 0, y(0) = 1$
7. $(3x + 2y + 1)dx - (3x + 2y - 1)dy = 0$
8. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 2)dy = 0$
9. $(2x - y + 1)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$
10. $(x + 3y + 1)dx + (2x + 6y - 1)dy = 0$

