Pertemuan 3

Transformasi baris dan kolom, matriks ekuivalen, matriks elementer, dan ruang baris dan kolom

Transpormasi elementer

- Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j atau penukaran kolom ke-i dan kolom ke-j dan ditulis $H_{ij}(A)$ untuk transformasi baris dan $K_{ij}(A)$ untuk transformasi kolom

a. Penukaran baris

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(A)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_{12}(A)$ berarti menukar baris ke-1 matriks A dengan baris ke-2

b. Penukaran kolom

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{23}(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

K13(A) berarti menukar kolom ke 3 matriks A dengan kolom ke 2

- memperkalikan baris ke-i dengan suatu bilangan skalar $h^{1}0$, ditulis $H_i^{(h)}(A)$ dan memperkalikan kolom ke-i dengan skalar $k^{1}0$, ditulis $K_i^{(k)}(A)$

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_2^{(-2)}(A)= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-6} & \mathbf{-2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad K_3^{(1/2)}(A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & \mathbf{1/2} \\ 0 & 1 & \mathbf{1/2} \end{bmatrix}$$

- Menambah kolom ke-i dengan k kali koom ke-j, ditulis $K_{ij}^{(k)}(A)$ dan menambah baris ke-i dengan h kali baris ke-j, ditulis $H_{ij}^{(h)}(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_2 + (-1 * H_3)]{H_{23}^{(-1)}(A)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[K_3 + (2 * K_1)]{K_{31}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Ekuivalen

- Dua buah matriks A dan B disebut ekuivalen (A~B) apabila salah satunya dapat diperoleh dari yang lain dengan transformasi-transformasi elementer terhadap baris dan kolom. Kalau transformasi elementer hanya terjadi pada baris saja disebut ELEMENTER BARIS, sedangkan jika transformasi terjadi pada kolom saja disebut ELEMENTER KOLOM

Latihan Soal

1. Periksalah apakah matriks A dan B ekuivalen

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Jawab

1. a. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan B=

   Jawaban : Matriks Ekuivaken karena terjadi pertukaran baris.

   b. A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   jawaban : Bukan matriks ekuivalen karena tidak ada pertukaran baris maupun kolom.

2. Diketahui A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks B dihasilkan dari sederetan transformasi elementer $H_{31}^{(-1)}$, $H_2^{(2)}$, H_{12}, $K_{41}^{(1)}$, $K_3^{(2)}$ terhadap A. Carilah B.

3. Diketahui $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks B diperoleh dari A dengan sederetan transformasi elementer H_{12}, $H_{31}^{(1)}$, K_{13}, $K_2^{(2)}$. Carilah B

Jawab

2.

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2&1\\4&1&0&2\\1&3&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[H_3+(-1*H_1)]{H_{31}^{(-1)}}\begin{bmatrix}3&1&2&1\\4&1&0&2\\-2&2&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{H_2^{(2)}}\begin{bmatrix}3&1&2&1\\8&2&0&4\\-2&2&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{12}}\begin{bmatrix}8&2&0&4\\3&1&2&1\\-2&2&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[K_4+(1*K_1)]{K_{41}^{(1)}K_3^{(2)}}\begin{bmatrix}8&2&0&12\\3&1&2&4\\-2&2&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{K_3^{(2)}}\begin{bmatrix}8&2&0&12\\3&1&4&4\\-2&2&-4&-2\end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix}2&2&2&2\\6&0&4&2\\1&2&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{H_{12}}\begin{bmatrix}6&0&4&2\\2&2&2&2\\1&2&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[H_3+(1*H_1)]{H_{31}^{(1)}}\begin{bmatrix}6&0&4&2\\2&2&2&2\\7&2&7&3\end{bmatrix}\xrightarrow{K_{13}}\begin{bmatrix}4&0&6&2\\2&2&2&2\\7&2&7&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{K_2^{(2)}}\begin{bmatrix}4&0&6&2\\2&4&2&2\\7&4&7&3\end{bmatrix}$$

Matriks Elementer

Matriks elementer adalah matriks identitas yang dikenai satu kali OBE.

Contoh :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika E suatu matriks elementer berordo m´m, dan A suatu matriks berordo m´n maka EA hasilnya akan sama dengan matriks yang diperoleh dari A dengan melakukan operasi baris elementer yang sesuai.

Contoh :

$$Diketahui: \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} R_{23} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tugas

- Berdasarkan matriks 3x3 yang telah anda buat berdasarkan NPM pada pertemuan pertama tentukanlah hasil matriks tranpormasi elementer berikut

TBE

1. B2<->B3
2. ½ B3
3. 2B1+B2

TKE

1. K1<->K2
2. 2K2
3. 3K2+K3

Latihan Soal

1. Diketahui matriks P= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 9 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

   a. Berapakah ukuran matriks P?
   b. Tentukan mana yang merupakan baris 1, baris 2, baris 3 kolom 4, kolom 5 baris 1
   c. Tentukan P_{11}, P_{31}, P_{23}, P_{15}, P_{35}

2. Diketahui persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & x_1 & 6 \\ -1 & 2 & x_2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3+1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1/2x_4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   Carilah x_1 , x_2 , x_3 , x_4

3. Misalkan (mxn) menyatakan ukuran matriks. Cari hasil perkalian (kalau terdefinisi) dari ukuran-ukuran berikut.
   a. (2x1)(1x3)
   b. (4x5)(2x3)
   c. (1x1)(1x3)
   d. (3x3)(3x4)
   e. (2x2)(3x2)

4. Carilah AB dan BA jika
   a. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

5. Diketahui

   $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

   Tentukan
   a. 2A, 3B, 2A-B, 3B-A
   b. (2A-B)(3B-A)

6. Selidikilah bahwa $AB \neq BA$ untuk $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. Matriks $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

   Carilah matriks P sedemikian sehingga AP=B.

8. Carilah 3A2+2A-3I2, jika $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

9. Carilah A^T jika A

   a. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

10. Tunjukan bahwa matriks A idempoten jika A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

11. Periksalah apakah matriks A dan B berikut ekuivalen

a. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b. A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. Diketahui A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks B dihasilkan dari sederetan transformasi elementer $H_{31}^{(-1)}$, $H_2^{(2)}$, H_{12}, $K_{41}^{(1)}$, $K_3^{(2)}$ terhadap A. Carilah B.

13. Diketahui $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks B diperoleh dari A dengan sederetan transformasi elementer H_{12}, $H_{31}^{(1)}$, K_{13}, $K_2^{(2)}$. Carilah B