Pertemuan 4

Determinan ordo 2x2, 3x3 dan nxn matriks minor dan kofaktor

Determinan Matriks

Pada Aljabar, determinan matriks dapat diartikan sebagai nilai yang mewakili sebuah matriks bujur sangkar. Simbol nilai determinan matriks A biasanya dinyatakan sebagai det(A) atau IAI.

Determinan Matriks Ordo 2 x 2

Seperti yang sobat idschool sudah ketahui, matriks ordo 2 dinyatakan seperti bentuk di bawah.

$$\mathrm{A} \ = \ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Nilai determinan A disimbolkan dengan $|A|$, cara menghitung nilai determinan A dapat dilihat seperti pada cara di bawah.

$$det(A) \ = \ |A| = ad - bc$$

Contoh Soal:
Tentukan nilai determinan matriks

$$A \ = \ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Pembahasan:

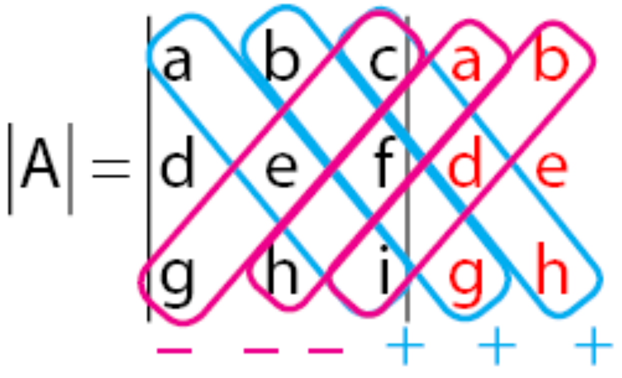
$$|A| = ad - bc = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 15 - 2 = 13$$

Determinan Matriks Ordo 3 x 3

Matriks Ordo 3 adalah matriks bujur sangkar dengan banyaknya kolom dan baris sama dengan tiga. Bentuk umum matriks ordo 3 adalah sebagai berikut.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Cara menghitung determinan pada matriks dengan ordo tiga biasa disebut dengan *Aturan Sarrus*. Untuk lebih jelasnya, lihat penjelasan pada gambar di bawah.



$$|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Contoh perhitungan determinan pada matriks ordo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 2$$

$$|A| = 6 + 4 + 3 - 6 - 1 - 12$$

$$|A| = -6$$

Determinan matriks ordo nxn

- Menggunakan Ekspansi Kofaktor,
- Maka sebelum mencari determinan matriks yang berordo nxn kita harus mengetahui dahulu matriks minor dan kofaktor

Determinan dengan ekspansi kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor-** ***ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j pada matriks A.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Matriks C_{ij} dinamakan **kofaktor - *ij***, yaitu $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 .2$$

$$= -2$$

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor :

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$$

Contoh 6 :

Hitunglah Det(A) dengan ekspansi kofaktor $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} c_{3j}$$

$$= a_{31}\ C_{31} + a_{32}\ C_{32} + a_{33}\ C_{33}$$

$$= 0 + 1\ (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\ (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Menghitung det (A) dengan ekspansi kopaktor sepanjang **kolom ke-3**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} c_{i3}$$

$$= a_{13}\, C_{13} + a_{23}\, C_{23} + a_{33}\, C_{33}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Misalkan $A_{n \times n}$ dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij},

maka

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n2} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

dinamakan **matriks kofaktor A**.

Transpos dari matriks ini dinamakan **adjoin** *A*,

notasi *adj*(A).

$$adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Misalkan A adalah matriks persegi, beberapa sifat determinan matriks adalah :

1. Jika A memiliki invers, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

2. A memiliki invers jika dan hanya jika det (A) ≠ 0.
3. *det* (A) = *det* (A^t)
4. *det* (A) *det* (B) = *det* (AB)
5. Jika A memiliki invers, maka $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Contoh :

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukan matriks adjoin A dan A^{-1}

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{21} = 2,\ c_{22} = 1,\ c_{23} = -2,\ c_{31} = 1,\ c_{32} = 1,\ \text{dan}\ \ c_{33} = -1.$$

Matriks kofaktor dari A : $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Matriks Adjoin dari A : $adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = (1 \times -1) + (0 \times -1) + (1 \times 2) = 1 \quad (\textit{first row})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Mari kita langsung masuk pada contoh soal mencari determinan matriks 4x4.

Hitunglah Determinan Matriks A dimana,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Pada soal ini saya ingin bermain di baris 1. Sebenarnya terserah anda mau di kolom/baris mana memimilihnya. Sebagai tips, pilih kolom yang banyak angka 0 atau 1-nya. Perhatikan langkah penyelesaian saya di bawah ini.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad +1 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

18

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad -2 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 182$$

-91

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad +0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad -0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

18 + 182 + 0 + 0 = 200

Latihan Soal

1. Tentukan determinan matriks dengan OBE dan ekspansi kofaktor

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tunjukkan bahwa : $det\,(A)\; det\,(B) = det\,(AB)$

3. Diketahui : $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}$

Tentukan k jika det (D) = 29

4. Diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jika B = A^{-1} dan A^t merupakan transpos dari A. Tentukan nilai

$$x = \frac{\det\left(2A^2\right) - \det(5B)}{\det\left(A^t B\right)}$$