Pertemuan 5

Pengertian invers matriks, menentukan invers dengan perkalian matriks, adjoint matriks, transformasi baris elementer

Pengertian Matriks Invers

- Jika A dan B adalah matriks persegi, dan berlaku AB=BA=I mka dikatakan matriks A dan B saling invers. B disebut invers dari A, atau ditulis A^{-1}. Matriks yang memiliki invers disebut invertible atau matriks non singular, sedangkan matriks yang tidak memiliki invers disebut matriks singular

Invers matriks ordo 2x2

Untuk mencari invers matriks persegi berordo 2×2, coba perhatikan berikut ini.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $ad - bc \neq 0$, maka invers dari matriks A (ditulis A^{-1}) adalah sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Jika $ad - bc = 0$ maka matriks tersebut tidak mempunyai invers, atau disebut matriks singular.

Sifat-sifat matriks persegi yang mempunyai invers:

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Contoh 1

Contoh: Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Selidiki, apakah A dan B saling invers?

Penyelesaian :

Matriks A dan B saling invers jika berlaku A × B = B × A = I.

A × B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

B × A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Karena A × B = B × A maka A dan B saling invers, dengan A^{-1} = B dan B^{-1} = A.

Contoh 2

Tentukan invers matriks-matriks berikut.

a. A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

b. B = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

a. $A^{-1} = \dfrac{1}{8-7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

b. $B^{-1} = \dfrac{1}{-12-(-10)}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$

Soal Latihan berdasarkan 3 digit NPM anda
Misal (20174350167) maka nilai a=1, b=6 dan c=7

Tentukanlah invers matriks dari:

A $\begin{bmatrix} b-1 & c+1 \\ b+3 & c-3 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} b+c & a-c \\ b+c & b-a \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ a & -b \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} a-2 & c-2b \\ b+2 & 3-a \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} 3b-a & -2+a \\ b+2c & -b+1 \end{bmatrix}$

Invers Matriks Ordo 3x3 dengan Adjoint Matriks

Pada subbab sebelumnya, telah dijelaskan mengenai determinan matriks. Selanjutnya, adjoin A dinotasikan adj (A), yaitu transpose dari matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen matriks A, yaitu :

adj(A) = (kof(A))^T

Adjoin A dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(A) &= (\operatorname{kof}(A))^T \\
&= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Invers matriks persegi berordo 3 × 3 dirumuskan sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} adj\,(A)$$

Contoh Soal

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan invers matriks A, misalnya kita gunakan perhitungan menurut baris pertama.

Jawaban :

Terlebih dahulu kita hitung determinan A.

det A = $det\ A = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

= 1(1) – 2(2) + 1(1) = –2

Dengan menggunakan rumus adjoin A, diperoleh :

adj(A) = $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jadi, A^{-1} dapat dihitung sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Invers Matriks Ordo 3x3 dengan Transformasi Baris Elementer

Tentukan invers matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dengan transformasi baris elementer.

Jawaban :

$$(A_3 \mid I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[B_3 - B_1]{B_2 - 2B_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{B_3 + B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{B_2 - 2B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{B_1 - B_2 =} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

invers matriks A dengan transformasi baris elementer

Jadi, diperoleh $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Soal Latihan berdasarkan 3 digit NPM anda Misal (20174350167) maka nilai a=1, b=6 dan c=7

- Tentukanlah Invers dari matriks berikut

$$A\begin{bmatrix} a-2 & b+1 & c-2 \\ b-1 & b+2 & c+1 \\ c-3 & b+3 & c-3 \end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix} 2b+1 & 1-b & c+1 \\ c-2a & 2+c & 2c-2 \\ a+3b & 3c-a & 1+3b \end{bmatrix}$$