Pertemuan 6

Pengertian sistem persamaan linier, penyelesaian SPL dengan aturan Crammer, penyelesaian SPL dengan metode invers matriks

Pengertian Sistem Persamaan Liner

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel. Contohnya adalah:

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 2y + 4z &= -2 \\ -x + \tfrac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned}$$

Sistem ini terdiri dari tiga persamaan dengan tiga variabel x, y, z. Solusi sistem linear ini adalah nilai yang dapat menyelesaikan persamaan ini. Solusinya adalah:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Kata "sistem" di sini penting karena menunjukkan bahwa persamaan-persamaannya perlu dipertimbangkan bersamaan dan tidak berdiri sendiri.

Penyelesaian SPL dengan Metode Crammer

jika **Ax** = **b** adalah sebuah sistem linear *n* yang tidak di ketahui dan det(A)≠ 0 maka persamaan tersebut mempunyai penyelesaian yang unik

$$X_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, X_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, ..., X_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

dimana A_j adalah matrik yang didapat dengan mengganti kolom $_j$ dengan matrik b

Contoh soal: Gunakan metode cramer untuk menyelesaikan persoalan di bawah ini

$x_1 + 2x_3 = 6$

$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$

$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$

Jawab: bentuk matrik A dan b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

kemudian ganti kolom $_j$ dengan matrik b

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

dengan metode sarrus kita dapat dengan mudah mencari determinan dari matrik-matrik di atas

maka,

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

Penyelesaian SPL dengan Invers Matriks

Contoh Soal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + \qquad 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Pemecahan untuk SPL tersebut :

$$\begin{aligned} A\,X &= B \\ A^{-1}.A.X &= A^{-1}.B \\ I.X &= A^{-1}.B \\ X &= A^{-1}.B \end{aligned}$$

Untuk memperoleh matriks A^{-1} gunakan definisi :

$$A^{-1} = x\,Adj\,(A)$$

Matriks Minor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (40 - 0) = 40$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (16 - 3) = 13$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 5) = -5$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (8 - 3) = 5$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (8 - 3) = 5$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2) = -2$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (6 - 15) = -9$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 6) = -3$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (5 - 4) = 1$

Kofaktor semua entri Aij adalah :

$C_{11} = -1^2 . 40 = 40$ $\quad$ $C_{12} = -1^3 . 13 = -13$ $\quad$ $C_{13} = -1^4 . -5 = -5$

$C_{21} = -1^3 . 16 = 16$ $\quad$ $C_{22} = -1^4 . 5 = 5$ $\quad$ $C_{23} = -1^5 . -2 = 2$

$C_{31} = -1^4 . -9 = -9$ $\quad$ $C_{11} = -1^5 . -3 = 3$ $\quad$ $C_{11} = -1^6 . 1 = 1$

Matriks Kofaktor

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj (A) adalah} = C^T = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan Matriks A degan cara Ekspansi Baris 1

$$\text{Det } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$= a_{11} . c_{11} + a_{12} . c_{12} + a_{13} . c_{13}$

$= 1.40 + 2 . (-13) + 3 (-5) = -1$

Matriks Inversnya adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(\square)} \text{ x Adj (A)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \quad X \quad \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL nya adalah

$$X = A^{-1}.B$$

$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad X \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} \square x1 \\ \square x2 \\ \square x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga di dapat nilai $\boldsymbol{X1 = 1, X2 = -1\ dan\ X3 = 2}$

Latihan Soal

- Selesaikanlah soal berikut dengan menggunakan penyelesaian SPL Metode Crammer dan Invers Matriks

1. $x - 2y + z = 6$
   $3x + y - 2z = 4$
   $7x - 6y - z = 10$

2. $5x - 3y + 2z = 3$

   $8x - 5y + 6z = 7$
   $3x + 4y - 3z = 15$

3. $x + y + z = -6$
   $x - 2y + z = 3$
   $-2x + y + z = 9$

4. Pak budi memiliki toko kelontong yang menjual campuran beras A, beras B dan beras C yang dijual dengan klasifikasi berikut :

- Campuran 3 kg beras A, 2 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual seharga Rp19.700,00.
- Campuran 2 kg beras A, 1 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual Rp14.000.
- Campuran 2 kg beras A, 3 kg beras B, dan 1 kg beras C dijual seharga Rp17.200,00.

Hitunglah harga tiap kg beras A, B, dan C ?

5. Pada suatu hari, tiga sahabat yang bernama Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Mereka membeli buku tulis, pensil dan penghapus. Hasil belanja mereka di toko buku adalah sebagai berikut :

- Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.700
- Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.300
- Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp7.100

Berapa harga untuk sebuah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus ?