

Pertemuan 7

Penyelesaian SPL dengan Eliminasi Gauss, penyelesaian SPL dengan eliminasi Gauss Jordan

Penyelesaian SPL dengan Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss adalah suatu metode untuk mengoperasikan nilai-nilai di dalam matriks sehingga menjadi matriks yang lebih sederhana lagi. Dengan melakukan operasi baris sehingga matriks tersebut menjadi matriks yang baris. Ini dapat digunakan sebagai salah satu metode penyelesaian persamaan linear dengan menggunakan matriks. Caranya dengan mengubah persamaan linear tersebut ke dalam matriks teraugmentasi dan mengoperasikannya. Setelah menjadi matriks baris, lakukan substitusi balik untuk mendapatkan nilai dari variabel-variabel tersebut.

Ciri ciri Metode Gauss adalah

1. Jika suatu baris tidak semua nol, maka bilangan pertama yang tidak nol adalah 1 (1 utama)
2. Baris nol terletak paling bawah
3. 1 utama baris berikutnya berada di kanan 1 utama baris di atasnya
4. Dibawah 1 utama harus nol

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian SPL dengan Eliminasi Gauss Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan adalah pengembangan dari eliminasi Gauss yang hasilnya lebih sederhana lagi. Caranya adalah dengan meneruskan operasi baris dari eliminasi Gauss sehingga menghasilkan matriks yang Eselon-baris. Ini juga dapat digunakan sebagai salah satu metode penyelesaian persamaan linear dengan menggunakan matriks.

Metode ini digunakan untuk mencari invers dari sebuah matriks.

Prosedur umum untuk metode eliminasi Gauss-Jordan ini adalah

1. Ubah sistem persamaan linier yang ingin dihitung menjadi matriks augmentasi.
2. Lakukan operasi baris elementer pada matriks augmentasi (Alb) untuk mengubah matriks A menjadi dalam bentuk baris eselon yang tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal

- Cari Nilai X_1, X_2, X_3 pada persamaan dibawah ini menggunakan eliminasi gauss dan eliminasi gauss jordan

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 = 8$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 10$$

$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 8$$

Langkah 1 ubah menjadi matriks

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

Langkah 2 buat $B_1 = b_1 - b_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X_1 & X_2 & X_3 & \\ 2-1 & 1-3 & 4-3 & 8-8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

Langkah 3 buat $B_2 = b_2 - 3 \cdot b_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X_1 & X_2 & X_3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3-(3 \cdot 1) & 2-(3 \cdot -2) & 1-(3 \cdot 1) & 10-(3 \cdot 0) \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

Langkah 4 buat $B_3 = b_3 - b_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X_1 & X_2 & X_3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 1-1 & 3-(-2) & 3-1 & 8-0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Langkah 5 buat B2=b2 : 8

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0:8 & 8:8 & -2:8 & 10:8 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

Langkah 6 buat B3=b3 - 5.b2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0-(5.0) & 5-(5.1) & 2-(5.(-0.25)) & 8-(5.(1.25)) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 3.25 & 1.75 \end{array} \right]$$

Langkah 7 buat B3=b3 : 3.25

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0:3.25 & 0:3.25 & 3.25:3.25 & 1.75:1.75 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right]$$

Langkah Terakhir Substitusikan dari bawah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right]$$

Langkah terakhir adalah substitusikan balik dari bawah jadi

$$X_3 = 0.538$$

$$X_2 - 0.25(X_3) = 1.25$$

$$X_2 = 1.25 + 0.25(0.538)$$

$$X_2 = 1.384$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 = 0$$

$$X_1 = 2X_2 - X_3$$

$$X_1 = 2(1.384) - 0.538$$

$$X_1 = 2.23$$

Jadi $X_1 = 2.23$, $X_2 = 1.384$, $X_3 = 0.538$

Tambahan untuk penyelesaian dengan Eliminasi Gauss Jordan

Langkah 8 buat $B1=b1 + 2.b2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1+(2.0) & -2+(2.1) & 1+(2.(0.25)) & 0+(2.(1.25)) \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0:3.25 & 0:3.25 & 3.25:3.25 & 1.75:1.75 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right]$$

Langkah 9 buat $B2=b2 + 0.25(b3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1 & 0 & 0.5 & 2.5 \\ 0+(0.25(0)) & 1+(0.25(0)) & -0.25+(0.25(1)) & 1.25+(0.25(0.538)) \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.384 \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right]$$

Langkah 10 buat $B1=b1 - 0.5(b3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1-(0.5(0)) & 0-(0.5(0)) & 0.5-(0.5(1)) & 2.5-(0.5(0.538)) \\ 0 & 1 & -0.25 & 1.384 \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2.23 \\ 0 & 1 & 0 & 1.384 \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right]$$

Langkah Terakhir Substitusikan dari bawah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X1 & X2 & X3 & \\ 1 & 0 & 0 & 2.23 \\ 0 & 1 & 0 & 1.384 \\ 0 & 0 & 1 & 0.538 \end{array} \right] = \begin{array}{l} X1 = 2.21 \\ X2 = 1.384 \\ X3 = 0.538 \end{array}$$

Jadi $X1 = 2.23$, $X2 = 1.384$, $X3 = 0.538$

Latihan Soal

- Selesaikanlah soal berikut dengan menggunakan penyelesaian SPL Metode Eliminasi Gauss dan Gauss Jordan

$$\begin{aligned} 1. \quad & x - 2y + z = 6 \\ & 3x + y - 2z = 4 \\ & 7x - 6y - z = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 5x - 3y + 2z = 3 \\ & 8x - 5y + 6z = 7 \\ & 3x + 4y - 3z = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & x + y + z = -6 \\ & x - 2y + z = 3 \\ & -2x + y + z = 9 \end{aligned}$$

4. Pak budi memiliki toko kelontong yang menjual campuran beras A, beras B dan beras C yang dijual dengan klasifikasi berikut :

- Campuran 3 kg beras A, 2 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual seharga Rp19.700,00.
- Campuran 2 kg beras A, 1 kg beras B, dan 2 kg beras C dijual Rp14.000.
- Campuran 2 kg beras A, 3 kg beras B, dan 1 kg beras C dijual seharga Rp17.200,00.

Hitunglah harga tiap kg beras A, B, dan C ?

5. Pada suatu hari, tiga sahabat yang bernama Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Mereka membeli buku tulis, pensil dan penghapus. Hasil belanja mereka di toko buku adalah sebagai berikut :

- Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.700
- Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp 4.300
- Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus seharga Rp7.100

Berapa harga untuk sebuah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus ?

KUIS

(SOAL LATIHAN UTS)

$$1. A \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} 7 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -8 & 4 \\ 5 & -8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah nilai dari

- a. $(AB)^T$
- b. $B+2E$
- c. $A - B^T$
- d. $\text{Det } C$
- e. D^{-1}

2. Selesaikan sistem persamaan linier dibawah ini dengan 2 cara yaitu:

- a. Metode Cramer
- b. Eliminasi Gauss – Jordan

$$2x + 3y + z = 28$$

$$x + 2y - z = 6$$

$$x - y + 2z = 12$$

$$1. A \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -6 & 4 \\ 5 & -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah nilai dari

- a. $(AB)^T$
- b. $B+2E$
- c. $A - B^T$
- d. Det C
- e. D^{-1}

2. Selesaikan sistem persamaan linier dibawah ini dengan 2 cara yaitu:

- a. Metode Crammer
- b. Eliminasi Gauss – Jordan

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$