PERTEMUAN 9

Pengertian vektor, operasi hitung pada vektor, dot product, cross product, mencari panjang antara dua vektor

Pengertian Vektor

Vektor adalah sebuah besaran yang memiliki arah. Vektor juga dapat digambarkan sebagai panah yang menunjukan arah vektor dan panjang garisnya disebut juga ***Besar Vektor***. Vektor yang dinyatakan dengan nilai positif (+) ke arah kanan dan yang kearah kiri mempunyai nilai negatif (-)

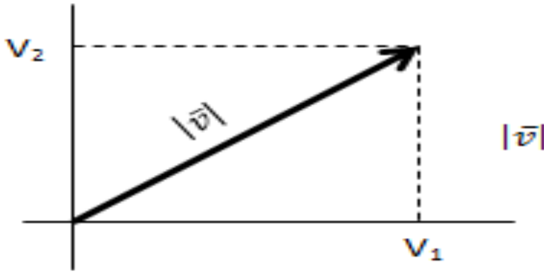
Jika vektor berawal dari titik A dan berakhir di titik B bisa ditulis dengan sebuah huruf kecil yang diatasnya terdapat tanda garis/ panah seperti $\vec{\boldsymbol{v}}$ atau $\vec{\boldsymbol{u}}$ atau bisa juga $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

Operasi Hitung Pada Vektor

- **Vektor di R^2 :**

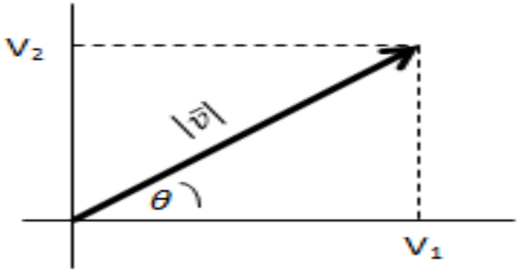
Panjang sebuah segmen garis yang menyatakan vektor $\bar{v}$ atau dinotasikan sebagai $|\,\bar{v}\,|$

Panjang vektor yaitu sebagai :



$$|\bar{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

Panjang vektor tersebut ialah dapat dikaitkan dengan sudut θ yang dibentuk oleh vektor dan sumbu x positif.



$$\cos\theta = \frac{v_1}{|\bar{v}|} \rightarrow v_1 = |\bar{v}| \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{v_2}{|\bar{v}|} \rightarrow v_2 = |\bar{v}|\, \text{in}\, \theta$$

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

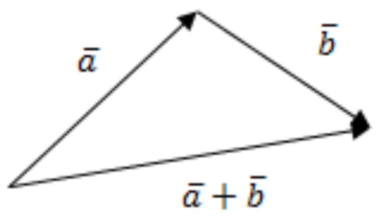
Operasi Vektor di R^2 :

⇒ Penjumlahan dan Pengurangan Vektor di R^2 :

Dua vektor atau lebih dapat dijumlahkan dan hasilnya dapat disebut resultan. Penjumlahan vektor secara aljabar dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan komponen yang juga seletak. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Penjumlahan secara grafis dapat dilihat pada gambar dibawah berikut ini :



Dalam pengurangan vektor ini, berlaku sama dengan penjumlahan yaitu sebagai berikut ini :

$$\bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Sifat – sifat dalam penjumlahan vektor adalah sebagai berikut :

- $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
- $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$

Pengurangan Vektor

Dalam pengurangan vektor, berlaku sama dengan penjumlahan yaitu sebagai berikut:

$$\bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Perkalian Vektor dengan Skalar

Suatu vektor dapat dikalikan dengan suatu skalar (bilangan real) dan akan menghasilkan suatu vektor baru.

Jika v adalah vektor dan k merupakan skalar. Maka perkalian vektor dapat dinotasikan:

$$k.\bar{v}$$

Keterangan:

- Jika k > 0, maka vektor $k.\bar{v}$ searah dengan vektor $\bar{v}$.
- Jika k < 0, maka vektor $k.\bar{v}$ berlawanan arah dengan vektor $\bar{v}$.
- Jika k = 0, maka vektor $k.\bar{v}$ adalah vektor identitas $\bar{o} = {0 \atop 0}$.

RUANG VEKTOR

A. Ruang-n Euclides

Konsep generalisasi dari vektor R^2 atau R^3 dikembangkan pada sub bab ini. Seperti yang telah diketahui sebuah vektor di R^2 dinyatakan oleh sepasang bilangan terurut $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$, begitupun vektor di R^3 dinyatakan tiga bilangan terurut $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$. Permasalahan mulai timbul setelah R^3, apakah perlu dikembangkan R^4, dan bagaimana visualisasinya. Jawabnya tentu perlu dikembangkan ke R^4, R^5, bahkan sampai R^n. Hal ini dapat dilihat pada Sistem Persamaan Linier yang telah dibicarakan pada sub bab sebelumnya, yang ternyata permasalahan vektor bukan hanya sampai R^3, melainkan sampai R^n. Masalah visualisasi tidak dapat dilaksanakan, karena dunia ini hanya disusun oleh konsep tiga dimensi.

Definisi: Sebuah vektor di R^n, dinyatakan oleh n bilangan terurut, yaitu $\mathbf{u}=(u_1, u_2, ..., u_n)$

Pada R^2 atau R^3, sebuah urutan bilangan di atas bermakna, yaitu sebagai titik atau sebagai vektor. Dalam R^n, keduanya dianggap sama, sehingga R^n merupakan generalisasi titik sekaligus generalisasi vektor.

Vektor nol: yaitu vektor yang semua entri-nya nol, misalkan $\mathbf{o}=(0, 0, ..., 0)$

Misalkan $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in R^n$, dua vektor disebut **sama**, atau $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, jika dan hanya jika $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, ..., $u_n=v_n$ {*semua entri yang seletak sama*}

Operasi-operasi pada vektor di R^n

1. Penjumlahan

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, didefinisikan :

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n)$ {*entri yang seletak dijumlahkan*}

Contoh:

Misalkan $\mathbf{u}$=(2, -1, 9, 3, 4), $\mathbf{v}$=(1, -2, 3, -2, 1, 0), $\mathbf{w}$=(5, -8, 2, 3, 4, 5)

$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ = tidak terdefinisi, karena $\mathbf{u} \in R^5$, sedangkan $\mathbf{v} \in R^6$

$\mathbf{v} + \mathbf{w}$ = (1+5, (-2)+(-8), 3+2, (-2)+3, 1+4, 0+5)=(6, -10, 5, 1, 5, 5)

2. Perkalian dengan skalar

Misalkan $\mathbf{u} \in R^n$, k skalar, didefinisikan :

$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ..., ku_n)$ {*setiap entri dikalikan dengan skalar*}

Contoh:

Misalkan $\mathbf{u}$=(2, -1, 9, 3, 4),

-3$\mathbf{u}$=(-6, 3, -27, -9, -12)

Akibat dari didefinisikannya perkalian dengan skalar, maka didapatlah operasi pengurangan, yaitu:

$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

Sifat-sifat penjumlahan dan perkalian dengan skalar

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^n$, k, l skalar, berlaku:

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *{komutatif}*

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *{asosiatif}*

c. $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ *{anggota identitas}*

d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{o}$ *{invers anggota}*

e. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ *{distributif terhadap skalar}*

f. $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ *{distributif terhadap skalar}*

g. $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$ *{asosiatif perkalian dengan skalar}*

h. $1.\mathbf{u} = \mathbf{u}$ *{perkalian dengan skalar 1 (satu)}*

Kedelapan sifat di atas nantinya akan diambil sebagai sebuah kebenaran (aksioma) dan ditambah dengan dua aksioma ketertutupan dipakai untuk mendefinisikan ruang vektor.

3. Hasil Kali Titik (hasil kali dalam Euclides)

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, didefinisikan :

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$ *{jumlah dari semua hasil kali entri yang seletak}*

Contoh:

Misalkan **u**=(2, -1, 9, 3, 4), **v**=(1, -2, 3, -2, 1, 0), **w**=(5, -8, 2, 3, 4, 5)

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ = tidak terdefinisi, karena $\mathbf{u} \in R^5$, sedangkan $\mathbf{v} \in R^6$

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 1.5 + (-2).(-8) + 3.2 + (-2).3 + 1.4 + 0.5 = 5 + 16 + 6 - 6 + 4 + 0 = 25$

Sifat hasil kali titik.

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^n$, k skalar, berlaku:

a. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$ *{komutatif}*

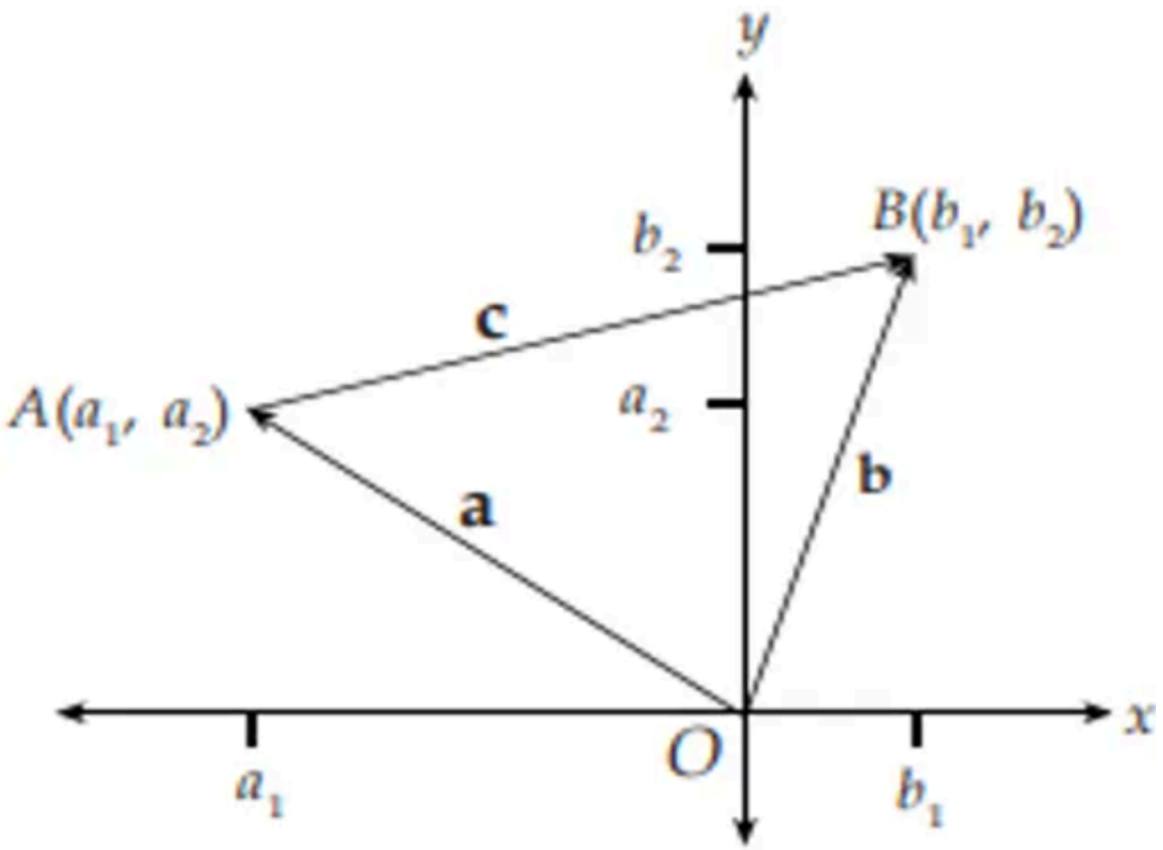
b. $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w})$ *{distributif}*

c. $k(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet (k\mathbf{v})$ *{kehomogenan}*

d. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} > 0$, jika $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, dan $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0$, jika $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ *{kepositifan}*

Keempat sifat di atas nantinya akan diambil sebagai kebenaran (aksioma) untuk membentuk definisi hasil kali dalam.

Panjang Vektor



Jika **a** (a_1, a_2) dan **b** (b_1, b_2)

Panjang vektor **a** adalah $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Panjang vektor **b** adalah $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

Jika **a** (a_1, a_2, a_3) dan **b** (b_1, b_2, b_3)

Panjang kedua vektor ini masing-masing

Panjang vektor **a** adalah $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Panjang vektor **b** adalah $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

Contoh Soal

Tentukanlah panjang vektor berikut ini !

1. c (3, 4)

2. d (5, 7)

3. e (7, 9)

4. f (3, 4, 5)

5. g (4, 5, 7)

6. h (5, 7, 9)

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Jadi panjang vektor **c** adalah 5.

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 8{,}6$$

Jadi panjang vektor **d** adalah 8,6.

$$|\mathbf{e}| = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130} = 11{,}4$$

Jadi panjang vektor **e** adalah 11,4.

$$|\mathbf{f}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7{,}07$$

Jadi panjang vektor **f** adalah 7,07.

$$|\mathbf{g}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 25 + 49} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} = 9{,}49$$

Jadi panjang vektor **g** adalah 9,49.

$$|\mathbf{g}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 49 + 81} = \sqrt{155} = 12{,}45$$

Jadi panjang vektor **h** adalah 12,45.