Pertemuan 10

Proyeksi vektor, cosinus sudut antara dua vektor, dan besar sudutnya

Proyeksi Skalar Ortogonal

- Proyeksi skalar ortogonal biasa disebut juga dengan proyeksi panjang vektor ortogonal. Dalam kata lainnya, objek proyeksi adalah panjang vektor. Rumus untuk menghitung panjang proyeksi skalar vektor ortogonal adalah sebagai berikut

1. Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$.

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

2. Proyeksi skalar ortogonal $\vec{b}$ pada arah vektor $\vec{a}$.

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Proyeksi Vektor Ortogonal

- Objek pada proyeksi skalar vektor ortogonal adalah panjang proyeksi vektor. Sedangkan pada proyeksi vektor ortogonal yang menjadi objek utamanya adalah vektornya. Vektor hasil proyeksi dapat ditentukan melalui rumus berikut

1. Proyeksi vektor ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$

2. Proyeksi vektor ortogonal $\vec{b}$ pada $\vec{a}$.

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Contoh 1

Diketahui $\mathbf{a}$ = [8, 4] dan $\mathbf{b}$ = [4, -3]. Tentukan panjang proyeksi vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ dan panjang proyeksi vektor $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$

Jawab :

Panjang proyeksi vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ adalah

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|8(4) + 4(-3)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|20|}{5} = 4$$

Panjang proyeksi vektor $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$ adalah

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|8(4) + 4(-3)|}{\sqrt{8^2 + 4^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{80}} = \sqrt{5}$$

Contoh 2

Panjang proyeksi vektor **a** = 3**i** + 4**j** - **k** pada vektor **b** = **i** - 2**j** + **k** adalah ...

Jawab :

a = [3, 4, -1]

b = [1, -2, 1]

Panjang proyeksi vektor **a** pada **b** adalah

$$|\mathbf{p}| = \frac{|3(1) + 4(-2) + (-1)1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Contoh 3

Diketahui $\mathbf{a}$ = [3, 2, 4] dan $\mathbf{b}$ = [0, 3, -4]. Tentukan proyeksi skalar $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ dan proyeksi skalar $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$.

Jawab :

$\mathbf{a}$ = [3, 2, 4]

$\mathbf{b}$ = [0, 3, -4]

Proyeksi skalar $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ adalah

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{3(0) + 2(3) + 4(-4)}{\sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}} = -2$$

Proyeksi skalar $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$ adalah

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3(0) + 2(3) + 4(-4)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{-10}{\sqrt{29}}$$

Contoh 4

Diketahui $\mathbf{a}$ = [6, -4, 2] dan $\mathbf{b}$ = [4, 2, -2]. Tentukan proyeksi vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ dan proyeksi vektor $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$.

Jawab :

$\mathbf{a}$ = [6, -4, 2]

$\mathbf{b}$ = [4, 2, -2]

Proyeksi vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$ adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b} \\
&= \left(\frac{6(4)+(-4)2+2(-2)}{4^2+2^2+(-2)^2}\right)[4, 2, -2] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)[4, 2, -2] \\
&= [2, 1, -1]
\end{aligned}$$

Proyeksi vektor $\mathbf{b}$ pada $\mathbf{a}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\right)\mathbf{a} \\
&= \left(\frac{6(4)+(-4)2+2(-2)}{6^2+(-4)^2+2^2}\right)[6,-4,2] \\
&= \left(\frac{3}{14}\right)[6,-4,2] \\
&= \left[\frac{9}{7},-\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right]
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian-uraian diatas, kita dapat menyimpulkan 2 hal berikut :

1. Proyeksi skalar akan menghasilkan skalar (bisa bernilai positif atau negatif), sedangkan proyeksi vektor akan menghasilkan vektor.
2. Panjang proyeksi vektor merupakan nilai mutlak dari proyeksi skalar.

5. Sudut antara dua vektor

Secara geometri kita tak mampu menggambarkan (memvisualisasikan) vektor R^n, karena itu sudut diantara dua vektor pun, bukanlah sudut dalam makna yang dapat digambarkan demikian itu. Melainkan sudut dalam makna yang di dalam ide saja.

Misalkan **u**, **v** $\in R^n$, didefinisikan sudut diantara vektor **u** dan **v**, dinyatakan sebagai cosinusnya:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}, \text{ jika } \mathbf{u}\neq\mathbf{o} \text{ dan } \mathbf{v}\neq\mathbf{o}$$

Contoh:

Misalkan **u**=(2, -1, 9, 3, 4) dan **v**=(1, -2, 3, -2, 1)

$$\cos\,\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2+2+27-6+1}{\sqrt{4+1+81+9+16}\sqrt{1+4+9+4+1}} = \frac{26}{\sqrt{111}\sqrt{19}} = \frac{26}{\sqrt{2109}}$$

Latihan

- Diketahui 3 titik A(4, -1, 2), B(4, 3, -2) dan C(1, 3, 2). Tentukan panjang proyeksi vektor **AB** pada **BC**
- Dua vektor **u** = 2**i** + 3**j** + m**k** dan **v** = 4**i** - 4**j** + 2**k** membentuk sudut tumpul. Jika panjang proyeksi vektor **u** pada **v** adalah 2, maka nilai m adalah ...
- Diketahui **p** = [2, -1, 7] dan **q** = [3, 0, -4]. Tentukan proyeksi skalar (**p** + **q**) pada 2**q**
- Diketahui **a** = p**i** - 2**j** + 2**k** dan **b** = 2**i** + q**j** + 4**k**. Jika **c** = **i** - 3**j** + r**k** adalah proyeksi vektor **a** pada **b**, maka nilai p + q + r adalah ...