Pertemuan 11

Persamaan Garis Lurus dan Persamaan Bidang Datar

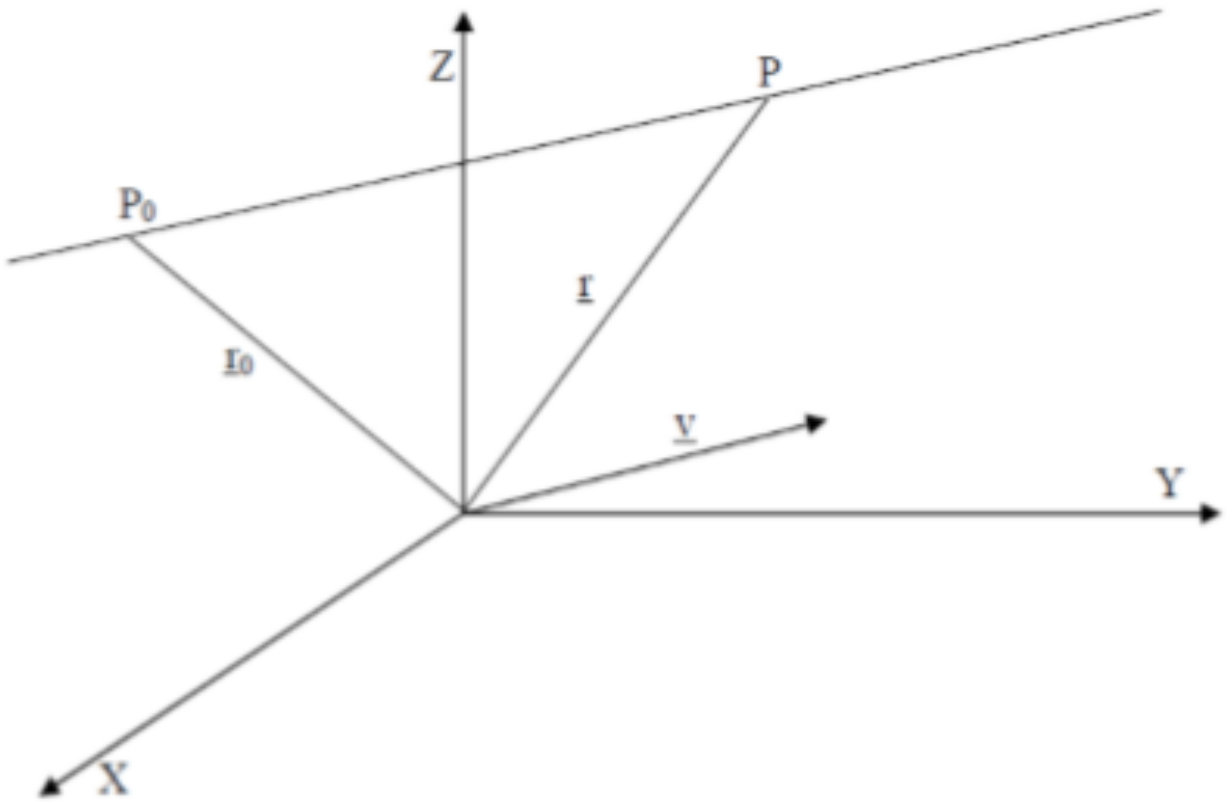
Persamaan Garis Lurus

a. Persamaan vektor, parametrik dan simetrik pada satu titik

Pada gambar dibawah ini l adalah garis yang melalui titik $P_o(x_o, y_o, z_o)$ dengan vektor posisi $\underline{r_o}$ dan sejajar dengan vektor $\underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$. Untuk menentukan persamaan garis l, diambil sebarang titik P(x, y, z) pada garis l, maka $\overrightarrow{P_oP} \,//\, \underline{v}$ dan $\overrightarrow{P_oP} = \lambda\underline{v}$ dengan λ bilangan real. Jika vektor-vektor posisi titik P_o dan P terhadap O adalah $\underline{r_o} = (x_o, y_o, z_o)$ dan $\underline{r} = \langle x, y, z\rangle$ maka $P_oP = \underline{r} - \underline{r_o}$ dan karena $\overrightarrow{P_oP} = \lambda\underline{v}$ maka :

$$\underline{r} - \underline{r_o} = \lambda\underline{v}$$

$$\underline{r} = \underline{r_o} + \lambda\underline{v}$$



Gambar 3

Karena r adalah vektor posisi sebarang titik P pada garis l dan memenuhi persamaan terakhir, maka setiap titik P pada garis l akan memenuhi persamaan tersebut. Dengan kata lain, persamaan garis l yang melalui $P_o(x_o, y_o, z_o)$ dan sejajar dengan vektor $\underline{v} = \langle a, b, c \rangle$ adalah $\underline{\boldsymbol{r}} = \underline{\boldsymbol{r_o}} + \boldsymbol{\lambda}\underline{\boldsymbol{v}}$. Atau,

$$\boxed{\underline{r} = r_o + \lambda \underline{v}}$$ (*Persamaan vektor garis l*)

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_o, y_o, z_o\rangle + \lambda\langle a, b, c\rangle$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_o + \lambda a, y_o + \lambda b, z_o + \lambda c\rangle$$

Maka diperoleh :

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x_o + \lambda a} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y_o + \lambda b} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z_o + \lambda c} \end{aligned}}$$ (*Persamaan parametrik garis l*)

Jika kita eliminir parameter λ , yaitu $\lambda = \frac{x - x_o}{a}$; $\lambda = \frac{y - y_o}{b}$; $\lambda = \frac{z - z_o}{c}$

Maka untuk persamaan garis lurus diketahui melalui titik $P_o(x_o, y_o, z_o)$ dengan bilangan

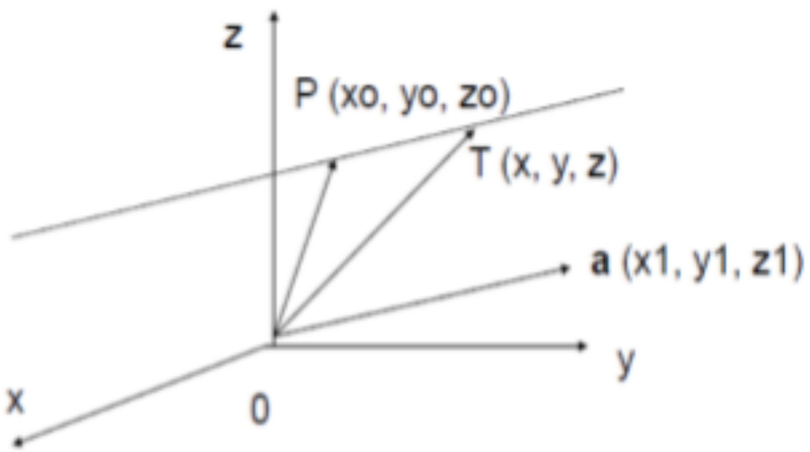
vektor arah $\underline{v} = \langle a, b, c\rangle$ adalah :

$$\boxed{\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c} \text{ dengan syarat a,b,c} \neq}$$ (*Persamaan simetrik garis l*)

Contoh soal

Tentukan persamaan garis yang melalui P(1,2,3) dan sejajar dengan a = (-1,1,4) !

Penyelesaian :



$\underline{t} = \underline{p} + \lambda\underline{a}$

Pers. vektor garis g:

$\langle x, y, z\rangle = \langle x_o, y_o, z_o\rangle + \lambda\langle a, b, c\rangle$

$\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle -1, 1, 4\rangle$

$\langle x, y, z\rangle = (1 - \lambda, 2 + \lambda, 3 + 4\lambda)$

Persamaan parameter garis g:

$x = x_o + \lambda a = 1 - \lambda$

$y = y_o + \lambda b = 2 + \lambda$

$z = z_o + \lambda c = 3 + 4\lambda$

Persamaan simetrik garis g:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 3}{4}$$

b. Persamaan vektor pada dua titik

Untuk mencari persamaan vektor dari garis yang melalui 2 titik A(x_1, y_1, z_1) dengan vektor letak $\underline{a}$ dan B(x_2, y_2, z_2) dengan vektor letak $\underline{b}$, kita dapat mengambil sebarang titik R(x, y,z) pada garis tersebut yang vektor posisinya adalah $\underline{r} = \langle x, y, z \rangle$. Dari kondisi ini dapat ditentuan bentuk persamaan vektor garis AB sebagai berikut :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{r} = \underline{a} + \lambda \overrightarrow{AB} \quad \text{dengan } \lambda \text{ bilangan real} \\ \underline{r} = \underline{a} + \lambda \left(\underline{b} - \underline{a} \right) \end{array}} \qquad (Persamaan\ vektor\ garis\ AB)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_{1}, y_{1}, z_1 \rangle + \lambda \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z - z_1 \rangle$$

Diperoleh

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1)\ . \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned}} \qquad (\textit{Persamaan parametrik garis AB})$$

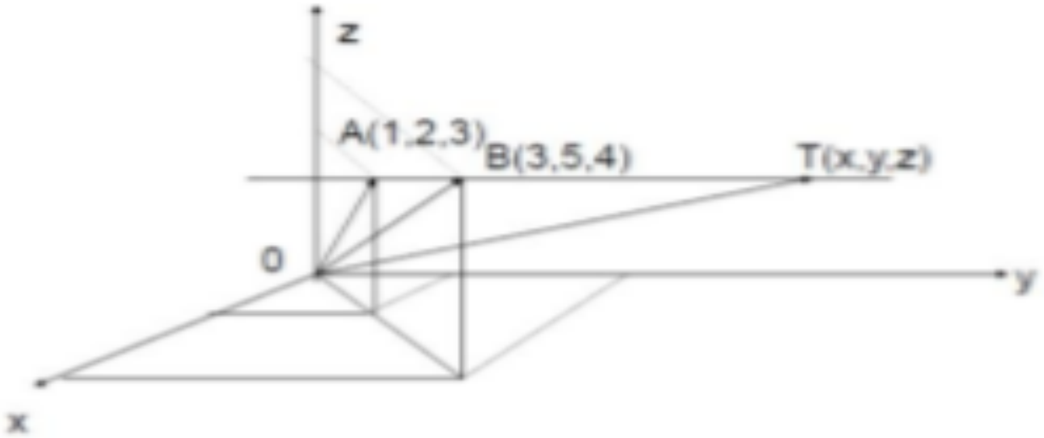
Dengan mengeliminir λ dari persamaan parametrik diatas, akan diperoleh persamaan simetrik dari garis AB sebagai berikut:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \qquad (\textit{Persamaan simetrik garis AB})$$

Contoh soal)

Tentukan persamaan garis g yg melalui (1,2,3) dan (3,5,4) !

Penyelesaian:



$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = (3,5,4) - (1,2,3)$

$\quad = (2,3,1)$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OT}$

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$

$(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(2,3,1)$

Jadi persamaan vektornya adalah

$(x,y,z) = (2\lambda + 1; 3\lambda + 2; \lambda + 3)$

Persamaan parameternya adalah

$x = 2\lambda + 1; \quad y = 3\lambda + 2; \quad z = \lambda + 3)$

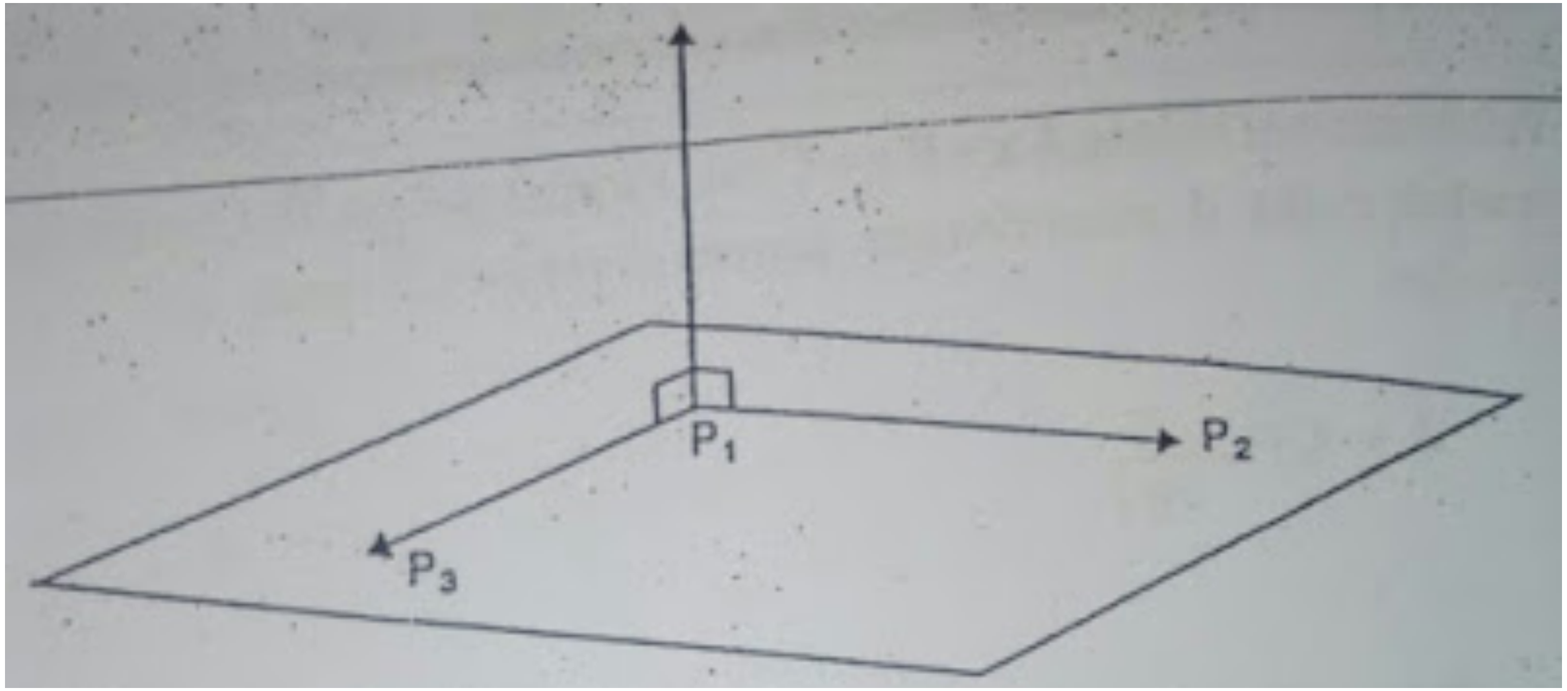
Persamaan simetriknya adalah :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$$

Latihan :

1. Tentukan persamaan garis potong bidang-bidang $x - y - z = 1$ dan $3x - 3y + 7z = 9$!
2. Carilah persamaan parametrik dan simetrik garis lurus yang melalui titik-titik (1, -2, 3) dan (4, 5, 6)!
3. Tentukanlah persamaan-persamaan vektor, parametrik dan simetrik untuk garis yang melalui titik A(3, -2, 4) dan B(5, 6, -2)!
4. Tentukan persamaan garis yang melalui (-1, 3, 2) serta tegak lurus bidang-bidang $V_1 = x + 2y = 2z = 5$ dan $V_2 = 3x + 5y + 2z = 8$
5. Tentukan persamaan garis lurus g yang melalui titik P (1, 0, -1) terletak pada bidang $V = x + 3y + z = 0$ serta juga tegak lurus garis lurus $g_1 : x + 2y - z = 3, 2y - 3y + 5z = 1$

Persamaan Bidang Datar



Kita tentukan vektor P1P2 = (x2-x1, y2-y1, z2-z1) dan P1P3 = (x3-x1, y3-y1, z3-z1). Perkalian silang dua vektor ini tegak lurus pada bidang yang melalui titik P1, P2,dan P3

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

Ambil sembarang titik V (x, y, z) pada bidang vektor P1V = (x-x1, y-y1, z-z1). Vektor ini tegak lurus pada vektor hasil kali P1P2 x P1P3 maka hasil kali titiknya sama dengan 0, yaitu

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle \cdot \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Karena V (x, y, z) sebarang titik pada bidang yang memenuhi persamaan ini, maka setiap titik pada bidang tersebut memenuhi persamaan tersebut.

Contoh Soal

Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (2,5,6) , (1,-1,2) dan (4,0,6)!

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan 20x-8y+17z = 22

Contoh Soal

Menentukan persamaan bidang datar yang melalui titik P(2, 4, -1), Q(2, 6, 4) dan R(3,-4, 5)

Bentuk umum persamaan bidang datar adalah **ax + by + cz + d = 0**, yang diperoleh dari $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) + d = 0$.

Tetapkan titik P sebagai titik $(x_1, y_1, z_1) = (2, 4, -1)$

Siapkan vector-vektor $\overrightarrow{PQ}$ *dan* $\overrightarrow{PR}$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Siapkan vektor normal $\overrightarrow{n}$ sebagai hasil kali silang $\overrightarrow{PQ}\ dan\ \overrightarrow{PR}$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

$$= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \hat{i} - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \hat{j} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \hat{k}$$

= 52**i** + 5**j** - 2**k**

Jadi, a = 52, b = 5, dan c = -2.

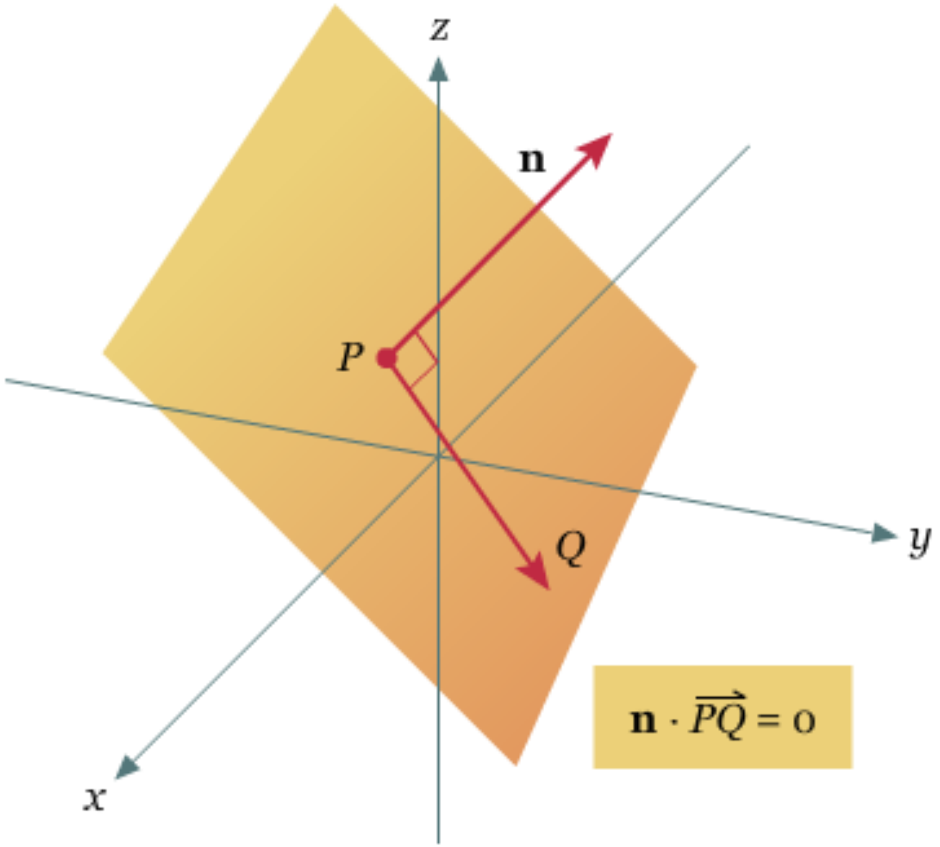
Substitusikan titik P(2, 4, -1) bersama a, b, dan c, ke dalam $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) + d = 0$.

$52(x - 2) + 5(y - 4) - 2(z + 1) = 0$

$52x - 104 + 5y - 20 - 2z - 2 = 0$

Bidang dalam Ruang

Kita telah melihat bahwa persamaan suatu garis dalam ruang dapat diperoleh dari suatu titik pada garis dan vektor yang sejajar dengan garis tersebut. Sekarang kita akan melihat bahwa persamaan suatu bidang dalam ruang dapat diperoleh dari suatu titik pada bidang dan vektor *normal* (tegak lurus) terhadap bidang tersebut.



Perhatikan bidang yang memuat titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan memiliki vektor normal tidak nol

$$\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$$

seperti yang ditunjukkan Gambar 3. Bidang ini memuat semua titik $Q(x, y, z)$ sedemikian sehingga vektor PQ ortogonal terhadap $\mathbf{n}$. Dengan menggunakan hasil kali titik, kita dapat menuliskan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan ketiga di atas merupakan persamaan bidang dalam **bentuk baku**.

Teorema 2 Persamaan Baku Suatu Bidang dalam Ruang

Bidang yang memuat titik (x_1, y_1, z_1) dan memiliki vektor normal

$$\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$$

dapat direpresentasikan oleh suatu bidang yang memiliki persamaan dalam bentuk baku

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Dengan mengelompokkan kembali suku-suku pada persamaan di atas, kita mendapatkan **bentuk umum** persamaan suatu bidang dalam ruang.

$$ax + by + cz + d = 0$$

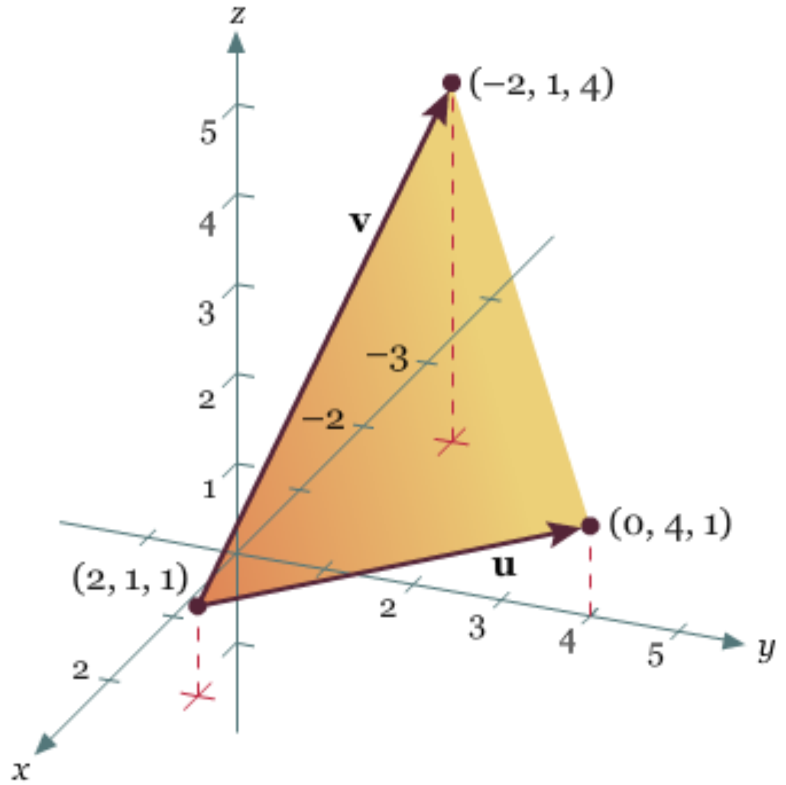
Bentuk umum persamaan bidang

Jika diberikan bentuk umum persamaan suatu bidang, dengan mudah kita dapat menentukan vektor normal terhadap bidang tersebut. Kita gunakan koefisien x, y, dan z untuk menuliskan

$$\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$$

Contoh 3: Menentukan Persamaan Bidang dalam Ruang

Tentukan persamaan umum bidang yang memuat titik-titik (2, 1, 1), (0, 4, 1) dan (−2, 1, 4).



Gambar 4 Bidang yang dibentuk **u** dan **v**.

Pembahasan Untuk menerapkan Teorema 2, kita membutuhkan suatu titik pada bidang dan vektor yang normal terhadap bidang tersebut. Terdapat tiga pilihan untuk titik pada bidang, tetapi tidak ada vektor normal yang diberikan. Untuk mendapatkan vektor normal, kita gunakan hasil kali silang vektor-vektor **u** dan **v** yang membentang dari titik (2, 1, 1) ke titik-titik (0, 4, 1) dan (−2, 1, 4), seperti yang ditunjukkan Gambar 4. Bentuk-bentuk komponen **u** dan **v** adalah

$$\mathbf{u} = \langle 0-2, 4-1, 1-1 \rangle = \langle -2, 3, 0 \rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle -2-2, 1-1, 4-1 \rangle = \langle -4, 0, 3 \rangle$$

yang mengakibatkan

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \\ &= \langle a, b, c \rangle \end{aligned}$$

adalah normal terhadap bidang yang diberikan. Dengan menggunakan bilangan-bilangan arah pada **n** dan titik $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 1)$, kita dapat menentukan persamaan bidang tersebut adalah

$$\begin{aligned} a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) &= 0 \\ 9(x-2) + 6(y-1) + 12(z-1) &= 0 && \text{Bentuk baku} \\ 9x + 6y + 12z - 36 &= 0 && \text{Bentuk umum} \\ 3x + 2y + 4z - 12 &= 0 && \text{Sederhanakan bentuk umum} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Catatan Dalam Contoh 3, kita dapat menguji bahwa titik-titik yang diberikan, (2, 1, 1), (0, 4, 1) dan (−2, 1, 4), memenuhi persamaan bidang yang kita peroleh.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)=(2,1,1) \quad &\Longrightarrow \quad 3x+2y+4z-12 &&= 3(2)+2(1)+4(1)-12 \\
& &&= 6+2+4-12 \\
& &&= 0 \quad \checkmark \\
(x,y,z)=(0,4,1) \quad &\Longrightarrow \quad 3x+2y+4z-12 &&= 3(0)+2(4)+4(1)-12 \\
& &&= 0+8+4-12 \\
& &&= 0 \quad \checkmark \\
(x,y,z)=(-2,1,4) \quad &\Longrightarrow \quad 3x+2y+4z-12 &&= 3(-2)+2(1)+4(4)-12 \\
& &&= -6+2+16-12 \\
& &&= 0 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$