Pertemuan 12

Ruang vector, ruang bagian, bebas linier dan bergantung linier

Ruang vektor

Misalkan V adalah himpunan tidak kosong, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Operasi penjumlahan adalah aturan yang memasangkan setiap objek $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam V dengan objek $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Operasi perkalian skalar adalah aturan yang memasangkan setiap skalar k dan setiap objek $\mathbf{u}$ dalam V dengan objek $k\mathbf{u}$.

Jika 10 aksioma berikut dipenuhi oleh setiap objek $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ dalam V dan setiap skalar k dan m, maka V disebut ruang vektor dan objek-objek dalam V disebut vektor.

1. Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ maka $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4. Terdapat $\mathbf{0} \in V$, yang disebut vektor nol, sedemikian sehingga $\mathbf{0}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}$.
5. Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$ terdapat $-\mathbf{u} \in V$, yang disebut negatif dari $\mathbf{u}$, sedemikian sehingga $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u})+\mathbf{u} = 0$.
6. Jika k adalah skalar dan $\mathbf{u} \in V$ maka $k\mathbf{u} \in V$.
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
8. $(k+m)\mathbf{u} = k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Skalar ini tidak terbatas pada bilangan real. Secara umum, skalar merupakan anggota dari suatu lapangan, sebutlah F. Jika V adalah ruang vektor dengan skalar-skalar anggota F, maka kita sebut bahwa V adalah ruang vektor atas lapangan F. Jika $F = \mathbb{R}$, maka V disebut ruang vektor real.

Teorema Ruang Vektor

Jika V adalah suatu ruang vektor, $\overline{u}$ adalah vektor dalam V, dan k sembarang skalar, maka

1. $\overline{0}\overline{u} = \overline{0}$
2. $k\overline{0} = \overline{0}$
3. $(-1)\overline{u} = -\overline{u}$
4. Jika $k\overline{u} = \overline{0}$, maka $k = \overline{0}$ atau $\overline{u} = \overline{0}$

Contoh soal

Nomor 1

Misalkan $V = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar:

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$
$$k(a,b) = (ka, kb)$$

Periksa apakah V merupakan ruang vektor real.

Diambil sebarang $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ dan $k, m \in \mathbb{R}$. Berdasarkan definisi himpunan V, kita dapat menulis

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2), \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

untuk suatu $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

Kita perlu memeriksa keberlakuan 10 aksioma ruang vektor.

Aksioma 1

Akan ditunjukkan $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$. Perhatikan bahwa

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Karena $\mathbb{R}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, maka $u_1 + v_1, u_2 + v_2 \in \mathbb{R}$. Akibatnya, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$. Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

Aksioma 2

Akan ditunjukkan $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Perhatikan bahwa

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Karena $u_1, v_1 \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ memenuhi sifat komutatif penjumlahan, maka $u_1 + v_1 = v_1 + u_1$. Dengan argumen yang serupa, dapat diperoleh $u_2 + v_2 = v_2 + u_2$.

Akibatnya

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2)\\ &= (v_1, v_2) + (u_1, u_2)\\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 2 terpenuhi.

Aksioma 3

Akan ditunjukkan $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (u_1, u_2) + [(v_1, v_2) + (w_1, w_2)]\\ &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2)\\ &= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2])\end{aligned}$$

Karena $u_1, v_1, w_1 \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ memenuhi sifat asosiatif penjumlahan, maka $u_1 + (v_1 + w_1) = (u_1 + v_1) + w_1$. Dengan argumen yang serupa, dapat diperoleh $u_2 + (v_2 + w_2) = (u_2 + v_2) + w_2$.

Akibatnya

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2)\\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2)\\ &= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2)\\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

Aksioma 4

Terdapat $\mathbf{0} = (0, 0) \in V$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + \mathbf{u} &= \mathbf{u} + \mathbf{0} && [V \text{ memenuhi aksioma 2}] \\ &= (u_1, u_2) + (0, 0) \\ &= (u_1 + 0, u_2 + 0) \\ &= (u_1, u_2) \\ &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

Aksioma 5

Terdapat $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2) \in V$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} && [V \text{ memenuhi aksioma 2}] \\ &= (-u_1, -u_2) + (u_1, u_2) \\ &= (-u_1 + u_1, -u_2 + u_2) \\ &= (0, 0) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 5 terpenuhi.

Aksioma 6

Akan ditunjukkan $k\mathbf{u} \in V$. Perhatikan bahwa

$$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$$

Karena $\mathbb{R}$ bersifat tertutup terhadap operasi perkalian, maka $ku_1, ku_2 \in \mathbb{R}$. Akibatnya $k\mathbf{u} \in V$. Jadi, aksioma 6 terpenuhi.

Aksioma 7

Akan ditunjukkan $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k[(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] \\ &= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (k[u_1 + v_1], k[u_2 + v_2]) \\ &= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2) \\ &= (ku_1, ku_2) + (kv_1, kv_2) \\ &= k(u_1, u_2) + k(v_1, v_2) \\ &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v} \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 7 terpenuhi.

Aksioma 8

Akan ditunjukkan $(k+m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+m)\mathbf{u} &= [k+m](u_1, u_2)\\ &= ([k+m]u_1, [k+m]u_2)\\ &= (ku_1 + mu_1, ku_2 + mu_2)\\ &= (ku_1, ku_2) + (mu_1, mu_2)\\ &= k(u_1, u_2) + m(u_1, u_2)\\ &= k\mathbf{u} + m\mathbf{u}\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 8 terpenuhi.

Aksioma 9

Akan ditunjukkan $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}k(m\mathbf{u}) &= k[m(u_1, u_2)]\\ &= k(mu_1, mu_2)\\ &= (k[mu_1], k[mu_2])\\ &= ([km]u_1, [km]u_2)\\ &= [km](u_1, u_2)\\ &= (km)\mathbf{u}\end{aligned}$$

Jadi, aksioma 9 terpenuhi.

Aksioma 10

Akan ditunjukkan $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Perhatikan bahwa

$$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = (u_1, u_2) = \mathbf{u}$$

Jadi, aksioma 10 terpenuhi. Dengan demikian, V adalah ruang vektor real.

Ruang bagian

Definisi Subruang (*Subspace*) atau Ruang Bagian

Suatu himpunan bagian W dari ruang vektor V disebut **subruang/ruang bagian** dari V jika W sendiri adalah ruang vektor di bawah operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Teorema 1: Subruang

Jika Q adalah subruang dari P, maka Q harus memenuhi 2 syarat berikut.

a. Jika $A, B \in Q$, maka $A + B \in Q$.
b. Jika k sembarang skalar dan A vektor sembarang dalam Q, maka $kA \in Q$.

Teorema 2: Subruang

Jika $A\overline{x} = \overline{0}$ adalah suatu sistem linear homogen dari m persamaan dan n variabel, maka himpunan vektor penyelesaiannya adalah suatu subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Catatan: Sistem linear homogen adalah sistem persamaan linear dengan konstanta 0 (nol), misalnya

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 0 \\ x - 4y &= 0 \end{cases}$$

Notasi $\mathbb{R}^n$ (dibaca: R n, bukan R pangkat n) menyatakan ruang dimensi n.

Definisi Himpunan Bebas Linear

DEFINISI

Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah himpunan yang terdiri dari dua atau lebih vektor dalam ruang vektor V.

Himpunan S disebut bebas linear, jika tidak ada vektor pada S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Himpunan yang tidak bebas linear disebut bergantung linear.

Himpunan yang hanya terdiri dari satu vektor disebut bergantung linear, jika vektor tersebut tak nol.

Teorema mengenai Himpunan Bebas Linear

Berikut ini beberapa teorema yang berkaitan dengan himpunan bebas linear dan bergantung linear.

TEOREMA 1

Misalkan S adalah himpunan yang beranggotakan dua vektor. Himpunan S bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor yang merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya.

TEOREMA 2

Himpunan berhingga yang memuat $\mathbf{0}$ adalah bergantung linear.

TEOREMA 3

Misalkan S adalah himpunan tak kosong dalam ruang vektor V, dengan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. Himpunan S bebas linear jika dan hanya jika persamaan vektor

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

hanya mempunyai solusi trivial, yaitu $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

TEOREMA 4

Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ adalah himpunan vektor dalam $\mathbb{R}^n$. Jika $r > n$ maka himpunan S bergantung linear.

Misalkan $S = \{(1,3), (2,7)\}$. Periksa apakah S himpunan bebas linear.

Pembahasan

Himpunan S beranggotakan dua vektor. Karena $\mathbf{v}_1$ bukan kelipatan skalar dari $\mathbf{v}_2$, begitupun sebaliknya, maka berdasarkan Teorema 1, S adalah himpunan bebas linear.

Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2), \mathbf{v}_2 = (-3, 2), \mathbf{v}_3 = (4, 5)$$

Periksa apakah S himpunan bebas linear.

Pembahasan

Perhatikan bahwa S adalah himpunan vektor dalam $\mathbb{R}^2$, yang terdiri dari 3 vektor. Karena $3 > 2$, maka berdasarkan Teorema 4, S adalah himpunan bebas linear. Terbukti.

Misalkan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,2), \mathbf{v}_2 = (1,0,1), \mathbf{v}_3 = (2,1,3)$$

Periksa apakah S himpunan bebas linear.

Pembahasan

Kita akan memeriksa apakah persamaan vektor

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

hanya mempunyai solusi trivial ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ k_1(1,1,2) + k_2(1,0,1) + k_3(2,1,3) &= (0,0,0) \\ (k_1, k_1, 2k_1) + (k_2, 0, k_2) + (2k_3, k_3, 3k_3) &= (0,0,0) \\ (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Berdasarkan kesamaan vektor pada $\mathbb{R}^3$, diperoleh

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$$

Matriks koefisien dari sistem persamaan di atas adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena det (A)=0 (periksa!), maka sistem persamaan ini mempunyai solusi non trivial. Berdasarkan Teorema 3, himpunan bergantung linear.

Misalkan $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ dengan

$$\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2, \mathbf{p}_2 = 1 + x^2, \mathbf{p}_3 = 1 + 2x$$

Periksa apakah S himpunan bebas linear.

Kita akan memeriksa apakah persamaan vektor

$$k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$$

hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 &= \mathbf{0} \\ k_1(1 + x + x^2) + k_2(1 + x^2) + k_3(1 + 2x) &= 0 + 0x + 0x^2 \\ (k_1 + k_1x + k_1x^2) + (k_2 + k_2x^2) + (k_3 + 2k_3x) &= 0 + 0x + 0x^2 \\ (k_1 + k_2 + k_3) + (k_1 + 2k_3)x + (k_1 + k_2)x^2 &= 0 + 0x + 0x^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan kesamaan vektor pada P_2, diperoleh

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

Matriks koefisien dari sistem persamaan di atas adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $\det(A) = 1 \neq 0$ (periksa!), maka sistem persamaan ini hanya mempunyai solusi trivial. Berdasarkan Teorema 3, himpunan S bebas linear.