Pertemuan 13

Kombinasi Linier, Basis Dan Dimensi

1. KOMBINASI LINEAR

Definisi

Vektor V dikatakan merupakan kombinasi linier dari vektor – vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bila **w** bisa dinyatakan sebagai :

$$\mathbf{w} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n \text{ , dengan } k_1, k_2, \ldots, k_n \text{ adalah skalar.}$$

TEOREMA

Himpunan semua kombinasi linear dari sembarang himpunan vektor-vektor yang tidak kosong dari V adalah suatu ruang bagian dari V

CONTOH SOAL KOMBINASI LINEAR

Diketahui a = (1, 2), b = (-2, -3), dan c = (1, 3). Apakah c merupakan kombinasi linear dari a dan b?

Jawab:

Misalkan c merupakan kombinasi linear dari a dan b maka dapat ditentukan dengan $c = k_1a + k_2b$

$(1, 3) = k_1(1, 2) + k_2(-2, -3)$

$(1, 3) = (1k_1, 2k_1) + (-2k_2, -3k_2)$

Maka dapat dinyatakan $1 = k_1 - 2k_2$ dan $3 = 2k_1 - 3k_2$ Sehingga diperoleh pengenyelesaian $k_1 = 3$ dan $k_2 = 1$

Jadi c merupakan kombinasi linear dari a dan b, dan dinyatakan dengan c = 3a + b

LATIHAN

1. Misal $u = (2, 4, 0)$, dan $v = (1, -1, 3)$ adalah vektor-vektor di R^3. Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas
   a. $h = (4, 2, 6)$
   b. $j = (1, 5, 6)$
   c. $r = (0, 0, 0)$
2. Diketahui $v = (3,9,-4,-2)$ merupakan kombinasi linier $u_1 = (1,-2,0,3)$, $u_2 = (2,3,0,-1)$ dan $u_3 = (2,-1,2,1)$. Apakah v merupakan kombinasi linear dari u_1, u_2 dan u_3 ?
3. Apakah polinomial-polinomial berikut ini bebas linier ? $p_1 = 1 - 2x + 3x^2$, $p_2 = 5 + 6x - x^2$, $p_3 = 3 + 2x + x^2$
4. Diketahui $u=(1,2)$, $v=(2,2)$, $w=(1,3)$. Tentukan:
   a. Apakah u, v dan w membangun R^2?

   b. Apakah u, v dan w bebas linier ?

1). Misal u = (2, 4, 0), dan v = (1, –1, 3) adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas

a. h = (4, 2, 6)

b. j = (1, 5, 6)

c. r = (0, 0, 0)

a. Tulis $k_1\bar{u} + k_2\bar{v} = \bar{a}$, akan diperiksa apakah ada k_1, k_2, sehingga kesamaan tersebut dapat terpenuhi :

$$k_1\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ \\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh:

$$\left(\begin{array}{cc:c}1 & ½ & 2\\1 & -3 & -6\\0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c}1 & ½ & 2\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Dengan demikian $\bar{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ yang ditulis dalam bentuk :

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

b. Tulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$$

akan diperiksa apakah ada k_1, k_2, sehingga kesamaan tersebut dapat terpenuhi;

$$k_1\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh:

$$\left(\begin{array}{cc:c}2 & 1 & 1\\4 & -1 & 5\\0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c}1 & ½ & 0\\0 & -3 & 3\\0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c}1 & ½ & ½\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut adalah tidak konsisten(tidak mempunyaisolusi).

Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi persamaan.

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$, maka dapat ditulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$$

artinya vektor nol merupakan kombinasi linear dari vektor apapun. Ini berkorespondensi dengan pernyataan bahwa SPL homogen merupakan SPL yang konsisten (selalu punya solusi).

2). Diketahui v =(3,9,-4,-2) merupakan kombinasi linier u_1= (1,-2,0,3), u_2 = (2,3,0,-1) dan u_3= (2,-1,2,1). Apakah v merupakan kombinasi linear dari u_1 , $u_2$dan u_3 ?

Jawab:

Bila v merupakan kombinasi linier dari u_1, u_2, dan u_3 maka dapat ditentukan x, y dan z sehingga:

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3$$

$$(3,9,-4,-2) = x(1,-2,0,3)+ y(2,3,0,-1) + z (2,-1,2,1)$$

$$(3,9,-4,-2) = (1x,-2x, 0x, 3x)+ (2y,3y,0y,-1y) + (2 z,-1z,2z,1z)$$

$$(3,9,-4,-2) = (x+2y+2z, -2x+3y-z, 2z, 3x-y+z)$$

Diperoleh persamaan:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + 3y - z = 9 \\ 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$$

Penyelesaiannya: x = 1, y = 3, dan z = -2

Jadi $v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$

Jika sistem persamaan di atas tidak memiliki penyelesaian maka v tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari u_1, u_2, dan u_3

3). Apakah polinomial-polinomial berikut ini bebas linier ?

p_1 $= 1 - 2x + 3x^2$,

p_2 $= 5 + 6x - x^2$,

p_3 $= 3 + 2x + x^2$

Jawab:

Untuk menguji polinomial bebas atau bergantung linier, langkah yang dilakukan adalah dengan menuliskan persamaan homogen sebagai berikut:

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = 0$$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}5\\6\\-1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=0\rightarrow\begin{bmatrix}1&5&3\\-2&6&2\\3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=0$$

Agar supaya a_1, a_2 dan a_3 memiliki nilai, maka determinan dari matrik 3 x 3 harus nol (0).

Hasil perhitungan determinan matrik 3 x 3 adalah 0, jadi nilai a_1, a_2 dan a_3 ada.

Dengan demikian polinomial-polinomial tersebut adalah bergantung linier.

Soal Kombinasi Linier

1. Periksa apakah (3,5) merupakan kombinasi Linier dari S ={(1,1),(2,1)}
2. Periksa apakah (3,5,7) merupakan kombinasi linier dari vektor $\bar{u} = (1,1,2), \bar{v} = (1,0,1) dan\ \bar{w} = (2,1,3)$.
3. Periksa apakah $7 + 8x + 9x^2$ merupakah kombinasi linier dengan

$$p_1 = 2 + x + 4x^2$$
$$p_2 = 1 - x + 3x^2$$
$$p_3 = 3 + 2x + 5x^2$$

Basis dan Dimensi

Definisi

Suatu himpunan vektor-vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ disebut ***sistem pembentuk*** dari ruang vektor V, ditulis $V = L\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ jika setiap vektor v V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$.

Contoh:

Vektor-vektor $\boldsymbol{a}$ = [2, 1, 0], $\boldsymbol{b}$ = [3, 2, 1], $\boldsymbol{c}$ = [5, 3, 1] adalah pembentuk ruang vektor $L\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Apakah vektor $\boldsymbol{d}$ = [1, 1, 1] $\boldsymbol{L}$?

Akan diperiksa apakah vektor $\boldsymbol{d}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

$$\boldsymbol{d} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c}$$

$$[1, 1, 1] = \lambda_1[2, 1, 0] + \lambda_2[3, 2, 1] + \lambda_3[5, 3, 1]$$

diperoleh

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Dengan menggunakan eliminasi pada ketiga persamaan di atas diperoleh $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Jadi, $\boldsymbol{d}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ sehingga $\boldsymbol{d}$ = [1, 1, 1] $\boldsymbol{L}$.

Definisi

Suatu ruang vektor V dikatakan ber***dimensi*** n jika dapat diperoleh suatu himpunan n vektor-vektor V yang bebas linier, sedangkan setiap himpunan $(n + 1)$ vektor-vektor V selalu bergantung linier, dengan perkataan lain, banyaknya maksimum vektor-vektor V yang bebas linier adalah n.

Teorema

Setiap n vektor-vektor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ yang bebas linier dari V, ruang vektor berdimensi n, pasti merupakan sistem pembentuk dari V.

Contoh:

Tentukan dimensi dari ruang vektor yang dibentuk oleh:

(i) $\boldsymbol{p}$ = [1, -2, 3, 1] dan $\boldsymbol{q}$ = [2, -4, 5, 2]

(ii) $\boldsymbol{u}$ = [5, 7, 11, 4] dan $\boldsymbol{v}$ = [10, 14, 22, 8]

Penyelesaian:

(i) Kedua vektor tidak berkelipatan sehingga sistem pembentuknya bebas linier. Jadi, dimensi dari $L\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\}$ adalah 2.

(ii) Vektor $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \neq 0$ dan $\boldsymbol{v} \neq 0$ sehingga $\{\boldsymbol{u}\}$ atau $\{\boldsymbol{v}\}$ merupakan sistem pembentuk yang bebas linier. Jadi, dimensinya adalah 1.

Setiap sistem pembentuk yang bebas linier disebut ***basis*** dari ruang vektor tersebut.
Setiap himpunan n vektor-vektor yang bebas linier $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n, disebut ***basis*** dari ruang vektor.

Contoh:
Tentukan dimensi dan basis dari ruang vektor yang dibentuk oleh:
(i) $\boldsymbol{a} = [1, 1, 2]$, $\boldsymbol{b} = [1, 2, 5]$, dan $\boldsymbol{c} = [5, 3, 4]$
(ii) $\boldsymbol{p} = [1, 2, 2]$, $\boldsymbol{q} = [2, 4, 4]$, dan $\boldsymbol{r} = [1, 0, 1]$
(iii) $\boldsymbol{u} = [1, 0, 1]$, $\boldsymbol{v} = [3, 0, 3]$, dan $\boldsymbol{w} = [2, 0, 2]$
(iv) $\boldsymbol{r} = [1, 0, 0]$, $\boldsymbol{s} = [1, 1, 0]$, dan $\boldsymbol{t} = [1, 1, 1]$
Penyelesaian:
(i) Akan diperiksa apakah $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ bebas linier.

$$\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_1[1, 1, 2] + \lambda_2[1, 2, 5] + \lambda_3[5, 3, 4] = [0, 0, 0]$$

diperoleh

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$
$$2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

Dengan menggunakan eliminasi diperoleh $\lambda_1 = -7\lambda_3$, $\lambda_2 = 2\lambda_3$. Misalkan $\lambda_3 = 1$, maka $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 2$. Jadi, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ bergantung linier.
Selanjutnya, akan dicari banyak maksimum di antara $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ yang bebas linier.
Vektor $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ atau $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ atau $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$ bebas linier sehingga dimensinya adalah 2.
Basisnya dapat dipilih di antara $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ atau $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ atau $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$.
(ii) Karena $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{p}$ maka $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ bergantung linier.
Vektor $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\}$ atau $\{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ bebas linier sehingga dimensinya adalah 2. Basisnya dapat dipilih di antara $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\}$ atau $\{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$.
(iii) Ketiga vektor saling berkelipatan, sehingga hanya satu vektor yang bebas linier.
Jadi, dimensinya adalah 1. Basisnya dapat dipilih $\{\boldsymbol{u}\}$ atau $\{\boldsymbol{v}\}$ atau $\{\boldsymbol{w}\}$.
(iv) Akan diperiksa apakah $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ bebas linier.

$$\lambda_1\boldsymbol{r} + \lambda_2\boldsymbol{s} + \lambda_3\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_1[1, 0, 0] + \lambda_2[1, 1, 0] + \lambda_3[1, 1, 1] = [0, 0, 0]$$

diperoleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sehingga $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ bebas linier. Jadi, dimensinya adalah 3 dan basisnya adalah $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$.

Catatan:
Karena vektor-vektor V tak berhingga banyaknya, kecuali ruang vektor yang dibentuk oleh vektor nol sendiri, yaitu $L\{0\}$, dan misalnya dimensi V berhingga $= n$, maka dapat dicari banyak sekali himpunan n vektor-vektor V yang bebas linier. Jadi dapat dipilih banyak basis untuk V.

Misalkan $S = \{\boldsymbol{a} = [1, 1, 1], \boldsymbol{b} = [2, 1, 1], \boldsymbol{c} = [3, 2, 2]\}$.
S membentuk ruang vektor $L(S) = L\ \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.
$S = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ adalah sistem pembentuk dari L.
Terlihat bahwa $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, jadi $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ bergantung linier. Sedangkan $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ bebas linier karena tidak berkelipatan.
Jadi, adalah sistem pembentuk yang bebas linier berarti basis dari L, sehingga dimensi dari L adalah 2.
Basis lain dari L yaitu himpunan 2 vektor L yang bebas linier, misalnya $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$ atau $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ ataupun yang lain dari $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ atau $\boldsymbol{c}$.
Misalnya: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c} = [3, 2, 2]$ L, $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} = [11, 6, 6]$ L sehingga $\{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$ bebas linier. Jadi, $\{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$ juga basis dari L.

Catatan:
$L\{0\}$, ruang vektor yang dibentuk oleh vektor nol, hanya beranggotakan vektor nol saja, 0 bergantung linier, jadi vektor yang bebas linier $L\{0\}$ tidak ada, berarti dimensi $L\{0\} = 0$.
Dimensi dari ruang vektor R^n adalah n.
Hal ini karena dapat ditemukan n vektor-vektor satuan : $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ dengan $\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, ..., 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = [0, 1, ..., 0]$, ..., $\boldsymbol{e}_n = [0, 0, ..., 1]$.

Contoh:
Vektor $\boldsymbol{a} = [1, -1, 2, 3]$ R^4 dapat ditulis sebagai kombinasi linier basis E sebagai berikut:
$\boldsymbol{a} = [1, -1, 2, 3] = 1[1, 0, 0, 0] - 1[0, 1, 0, 0] + 2[0, 0, 1, 0] + 3[0, 0, 0, 1] = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 + 3\boldsymbol{e}_4$

Catatan:
Jika L ruang vektor bagian dari V maka dimensi $L \leq$ dimensi V. Jika dimensi L = dimensi V, berarti $L = V$.
Setiap satu vektor tidak sama dengan nol R^3 merupakan sistem pembentuk ruang vektor bagian berdimensi 1. Jadi, jika $\boldsymbol{a} \neq 0$, maka $L\{\boldsymbol{a}\}$ adalah garis lurus dengan persamaan $x = \lambda\boldsymbol{a}$.
Setiap dua vektor yang bebas linier (tidak berkelipatan/tidak segaris) akan membentuk ruang vektor bagian berdimensi 2, yang merupakan bidang rata $L\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ yang persamaannya $x = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.

Contoh:
Akan diperiksa apakah titik-titik A(3, 1, 2), B(1, 2, 2), C(-1, 3, 2) segaris (kolinier).
Maka akan diperiksa apakah vektor **AB** dan **AC** berkelipatan.
AB = [-2, 1, 0] dan **AC** = [-4, 2, 0]. Jelas bahwa **AC** = 2**AB**. Jadi, A, B, C segaris.