

Pertemuan 14

Pengertian dan syarat dari transformasi linier

Definisi

Misalkan V, W suatu ruang vektor atas sebuah field.

$T: V \rightarrow W$ suatu fungsi.

T disebut *transformasi linear* jika untuk $u, v \in V$ dan k skalar berlaku

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(ku) = kT(v)$

Contoh

1. Suatu transformasi $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ didefinisikan sebagai

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

untuk setiap $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ akan ditransformasikan oleh T menjadi vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, karena

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 2 - (-3) \\ (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ disebut *peta* dari vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ oleh transformasi T .

Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ disebut *prapeta* dari vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oleh transformasi T .

Apakah transformasi T merupakan transformasi linear?

Misalkan $u, v \in \mathbb{R}^3$ dan k skalar.

Karena $u \in \mathbb{R}^3$ maka $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, karena $v \in \mathbb{R}^3$ maka $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ dengan

$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$.

$$1. \quad T(u + v) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)$$
$$= T\left(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) \\ (u_3 + v_3)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sedangkan } T(u) + T(v) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \\ u_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 - v_3 \\ v_3^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \\ (u_2 - u_3) + (v_2 - v_3) \\ u_3^2 + v_3^2 \end{pmatrix}$$

Ternyata $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$, sehingga T bukan transformasi linear.

2. Suatu transformasi $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2$$

untuk setiap $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- Tentukan hasil transformasi dari $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ terhadap T .
- Tentukan apakah T merupakan transformasi linear.

Jawab

a. $T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 + 1 = 3$

$$T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = -1 + 4 = 3$$

- b. Misalkan $u, v \in \mathbb{R}^2$ dan k skalar.

Karena $u \in \mathbb{R}^2$ maka $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, karena $v \in \mathbb{R}^2$ maka $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ &= (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned} T(ku) &= T\left(k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= ku_1 + ku_2 \\ &= k(u_1 + u_2) \\ &= kT\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= kT(u) \end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa T merupakan transformasi linear.

Contoh Soal

1. Misalkan $T:R^2 \rightarrow R^2$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh $T(v) = (2x, y)$ dengan $v = (x, y)$ di R^2 . buktikan bahwa T merupakan transformasi linier
2. Misalkan $T: R^2 \rightarrow R^3$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh $T(v) = (x, x + y, x - y)$ dengan $v = (x, y)$ di R^2 . Buktikan bahwa T merupakan transformasi linier
3. Buktikan linieritas transformasi $T:R^2 \rightarrow R^3$ dengan $T(x, y) = (2x + y, x - 3y, 3x + 1)$