Pertemuan 15

Pembuktian Transformasi Linier

Transformasi Linear

- Misalkan V dan W adalah ruang vektor $T: V \to W$ dinamakan transformasi linear, jika untuk setiap $\vec{a}, \vec{b} \in V$ dan $\alpha \in R$

  – $T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$

  – $T(\alpha\vec{a}) = \alpha T(\vec{a})$

  Jika $V = W$ maka T dinamakan operasi linear

- Contoh 1:

  Tunjukan bahwa $T: R^2 \to R^3$, dimana

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

  Merupakan transformasi linear

  Jawab:

  Ambil 1 unsur sembarang R (contoh α) dan 2 unsur sembarang di R^2,

  Misalkan $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

  - Akan ditunjukan bahwa $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ -(u_1 + v_1) \\ (u_2 + v_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - u_2 - v_2 \\ -u_1 - v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + v_1 - v_2 \\ -u_1 - v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

  Terbukti bahwa $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

- Akan ditunjukan bahwa $T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u})$

$$T(\alpha\vec{u}) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ -(\alpha u_1) \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ (\alpha)(-u_1) \\ \alpha u_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha T(\vec{u})$$

  Terbukti bahwa $T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u})$

Jadi, T merupakan transformasi linear

Contoh 2:

Misalkan T merupakan suatu transformasi dari $M_{2\times2}$ ke R yang didefinisikan oleh $T(A) = \det(A)$, untuk setiap $A \in M_{2\times2}$. Apakah T merupakan Transformasi Linear?

Jawab:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times2}$

Maka untuk setiap $\alpha \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} \det(\alpha A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \alpha^2 \det(A) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\det(\alpha A) \neq \alpha \det(A)$

Jadi T bukan transformasi linear

Contoh 3:

Diketahui $T: P2$ (Polinom orde 2)$\rightarrow R^2$, dimana

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

a. Apakah T merupakan transformasi linear

b. Tentukan $T(1 + x + x^2)$

Jawab:

a. Ambil 1 unsur sembarang R (contoh α) dan 2 unsur sembarang di $P2$, Misalkan $\vec{u} = u_1 + u_2x + u_3x^2, \vec{v} = v_1 + v_2x + v_3x^2$

- Akan ditunjukan bahwa $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$$\begin{aligned}
T(\vec{u} + \vec{v}) &= T\big((u_1 + u_2x + u_3x^2) + (v_1 + v_2x + v_3x^2)\big) \\
&= T\big((u_1+v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3+v_3)x^2\big) \\
&= \begin{pmatrix} (u_1+v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1+v_1) - (u_3+v_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1+v_1) - (u_3+v_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - u_2 - v_2 \\ u_1 + v_1 - u_3 - v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + v_1 - v_2 \\ u_1 - u_3 + v_1 - v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_3 \end{pmatrix} \\
&= T(u_1 + u_2x + u_3x^2) + T(v_1 + v_2x + v_3x^2) \\
&= T(\vec{u}) + T(\vec{v})
\end{aligned}$$

- Akan ditunjukan bahwa $T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u})$

$$\begin{aligned}
T(\alpha\vec{u}) &= T(\alpha(u_1 + u_2x + u_3x^2)) \\
&= T(\alpha u_1 + \alpha u_2x + \alpha u_3x^2) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ \alpha u_1 - \alpha u_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(u_1 - u_3) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} = \alpha\, T(u_1 + u_2x + u_3x^2) = \alpha\, T(\vec{u})
\end{aligned}$$

T merupakan Transformasi Linear

Latihan Soal

- Suatu Transformasi $T: R^3 \rightarrow R^2$ didefinisikan oleh

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b \\ a + c \end{pmatrix}$$

  Periksa apakat T merupakan transformasi linear
- Jika suatu transformasi $T: P_1 \rightarrow P_2$ diberikan oleh $T[2 + x] = 4 - x - x^2$ dan $T[1 + 3x] = 7 + 2x - 2x^2$

  Tentukan $T[3 - x]$
- Suatu transformasi linear, $T: R^2 \rightarrow R^3$.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } T\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  a. Tentukan matriks transformasi dari T

  b. Tentukan hasil transformasi $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

  c. Tentukan basis kernel dan jangkauan dari T