SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Sistem Persamaan Linear

Bentuk umum dari sistem persamaan linear adalah:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array} \qquad (1)
$$

dimana $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ variabel tak diketahui, a_{ij} , b_i, i = 1, 2,3, . . . , n; j = 1, 2, . . . , n bil. diketahui. Ini adalah SPL dengan n persamaan dan n variabel.

Sistem Persamaan Linear

Dengan menggunakan perkalian matriks, dapat menulis SPL (1) sebagai persamaan matriks:

$$Ax = b.$$

dimana dalam hal ini,

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$

$x = [x_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$

$b = [b_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$ (disebut juga vektor kolom)

Yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistem Persamaan Linear

Solusi SPL (1) adalah himpunan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang memenuhi n buah persamaan. Metode penyelesaian sistem persamaan lanjar dengan determinan (aturan Cramer) tidak praktis untuk sistem yang besar. Beberapa metode penyelesaian praktis sistem persamaan linear yang dibahas adalah:

1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode Gauss-Seidel.

Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variabel sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variabel bebas.

Metode eliminasi Gauss pada prinsipnya bertujuan mentransformasi sistem $Ax = b$ menjadi sistem

$$Ux = y$$

dengan U adalah matriks *segitiga atas*. Selanjutnya solusi x dapat dihitung dengan teknik penyulihan mundur.

Metode Eliminasi Gauss

Langkah- Langkah Metode Eliminasi Gauss

- Konversi SPL (1) kedalam bentuk $Ax = b$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

Langkah- Langkah Metode Eliminasi Gauss

- Matriks diubah menjadi ***augmented*** matriks :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Augmented Matrix **adalah matriks yang semua entrinya berisi koefisien-koefisien SPL yang kemudian diperbesar**

Metode Eliminasi Gauss

Langkah- Langkah Metode Eliminasi Gauss

- Mengubah matriks menjadi matriks segitiga atas dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

Operasi OBE

1. Menukar posisi dua baris sebarang (Pertukaran).

2. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol (Penskalaan).

3. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya (Penggantian).

Misalnya persamaan diganti dengan selisih persamaan itu dengan dua kali persamaan lain; yaitu

$$baris_r := baris_r - m_{p,r}\, baris_p$$

Bentuk matriksnya diolah menjadi bentuk sederhana sehingga tercapai 1 elemen tak nol pada suatu baris

Metode Eliminasi Gauss

Langkah- Langkah Metode Eliminasi Gauss

- Penyelesaian SPL dapat diperoleh dengan melakukan **Substitusi Mundur**:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

Metode Eliminasi Gauss

Langkah- Langkah Metode Eliminasi Gauss

- Penyelesaian SPL dapat diperoleh dengan melakukan **Substitusi Mundur**:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

Metode Eliminasi Gauss

Ilustrasi

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$
$$4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8$$
$$-2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10$$

Penyelesaian:

1. Konversi SPL ke dalam bentuk matriks $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

2. Matriks diubah menjadi ***augmented matrix***

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

3. Matriks diubah menjadi ***matriks segitiga atas*** dengan ***operasi OBE.***

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{B_2 - 2B_1} \\ \mathbf{B_3 + B_1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{12} \end{array}\right]$$

*) $\mathbf{B_2 - 2B_1}$ artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen-elemen pada baris ke satu.

$$\begin{array}{lrrrr} B_2 & :4 & 9 & -3 & 8 \\ 2B_2 & :4 & 8 & -4 & 4 \quad - \\ \hline \mathbf{B_2 - 2B_1} & :0 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

Metode Eliminasi Gauss

- Lanjutkan lakukan operasi baris elementer

$$\boldsymbol{B_3 - B_2} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 8 \end{array}\right]$$

- Matriks segitiga atas

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

4. Lakukan Subsitusi Mundur

- $4x_3 = 8$

  $x_3 = 2$

- Subsitusi x_3 ke persamaan $x_2 + x_3 = 4$

  $x_2 + x_3 = 4$

  $x_2 + 2 = 4$

  $x_2 = 4 - 2$

  $x_2 = 2$

- Subsitusi $x_2\ dan\ x_3$ ke persamaan :

  $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$

  $2x_1 + 4(2) - 2(2) = 2$

  $2x_1 + 8 - 4 = 2$

  $2x_1 + 4 = 2$

  $2x_1 = 2 - 4$

  $x_1 = -1$

Maka solusi dari persamaan di atas adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kemungkinan Solusi SPL

Tidak semua SPL mempunyai solusi. Ada tiga kemungkinan solusi yang dapat terjadi pada SPL:

(a) mempunyai solusi yang unik,

(b) mempunyai banyak solusi, atau

(c) tidak ada solusi sama sekali.

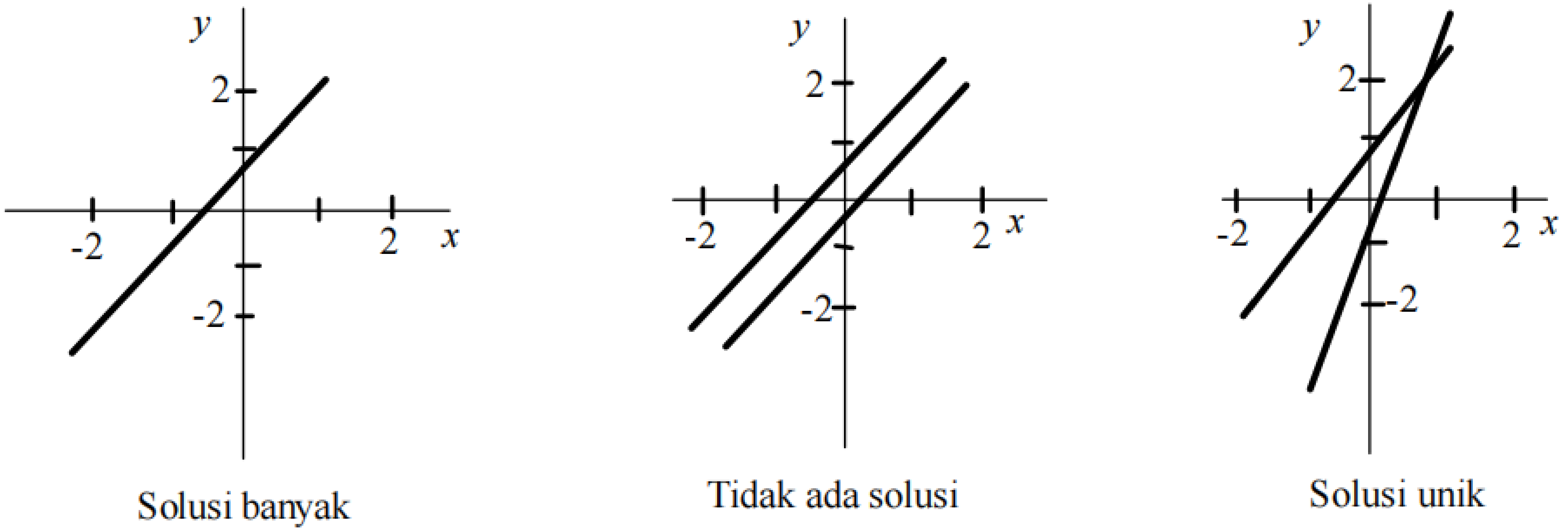
Dengan grafik, ketiga kemungkinan solusi ini diperlihatkan oleh tiga SPL dengan dua persamaan berikut:

$$(i)\quad \begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} -x + y &= 1 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} -x + y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

Kemungkinan Solusi SPL



Gambar 1: Kemungkinan Solusi SP Linear

Kemungkinan Solusi SPL

Untuk SPL dengan tiga buah persamaan atau lebih (dengan tiga peubah atau lebih), tidak terdapat tafsiran geometrinya (tidak mungkin dibuat ilustrasi grafisnya) seperti pada SPL dengan dua buah persamaan. Namun, masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya.

1. **Solusi unik/tunggal**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$

2. **Solusi banyak/tidak terhingga**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Kemungkinan Solusi SPL

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ yang dipenuhi oleh banyak nilai *x*. Solusinya diberikan dalam bentuk parameter: Misalkan $x_3 = k$, maka $x_2 = -6 + 3k$ dan $x_1 = 10 - 5k$, dengan $k \in R$. Terdapat tidak berhingga nilai k, berarti solusi SPL banyak sekali.

3. Tidak ada solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ dimana dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, *i* = 1, 2, 3

Metode Eliminasi Gauss Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan variasi dari metode eliminasi Gauss. Dalam hal ini, matriks *A* dieliminasi menjadi matriks identitas *I*. Di sini tidak diperlukan lagi teknik penyulihan mundur untuk memperoleh solusi SPL. Solusinya langsung diperoleh dari vektor kolom *b* hasil proses eliminasi.

$$Ax = b \rightarrow Ix = b'$$

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gaus-Jordan ditulis sebagai

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_3' \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n' \end{array}\right]$$

Solusinya: $x_1 = b_1'$

$x_2 = b_2'$

$\ldots \quad \ldots$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

Ilustrasi

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$
$$4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8$$
$$-2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10$$

- Penyelesaian (langkah 1 s.d 2 sama seperti metode eliminasi Gauss). Namun pada Elimasi Gauss Jordan langkah yaitu matriks segitigas atas diubah menjadi matriks identitas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Maka solusi dari SPL di atas adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Latihan

Selesaikanlah SPL berikut dengan Metode Eliminasi Gauss dan Gauss Jordan!

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 10 \\
2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 &= 8 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\
6x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

TERIMA KASIH