SOLUSI SISTEM PERSAMAAN TAK LINEAR

Sistem Persamaan Tak Linear

Penyelesaian persamaan tak linear adalah menghitung akar suatu persamaan tak linear dengan suatu variabel x, $f(x)$, atau secara umum dituliskan:

$$f(x) = 0$$

Yaitu nilai $x = s$ sedemikian sehingga $f(s) = 0$.

Sistem Persamaan Tak Linear

Persamaan $f(x) = 0$ dapat berbentuk sebagai berikut:

1. Persamaan aljabar
   $a^n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \cdots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a^n \neq 0, n \geq 2$
2. Persamaan transenden, persamaan yang memuat fungsi-fungsi trigonometri, logaritma atau eksponen
   i. $e^{-x} + \sin x = 0$
   ii. $\ln x - 2 = 0$
3. Persamaan campuran: memuat baik persamaan polinom atau transenden
   i. $x^2 \, sin\, x + 3 = 0$
   ii. $x^3 + ln\, x = 0$

Penyelesaian Sistem Persamaan Tak Linear

Dalam metode numerik, pencarian akar $f(x) = 0$ dilakukan secara lelaran (iteratif). Sampai saat ini sudah banyak ditemukan metode pencarian akar. Secara umum, semua metode pencarian akar tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua golongan besar:

1. **Metode Tertutup**
   - Mencari akar pada selang [a,b] tertentu
   - Dalam selang [a,b] dipastikan terdapat minimal satu buah akar
   - Hasil selalu konvergen, tetapi relatif lambat dalam mencari akar.

Metode ini ada 2 :

1. Metode Biseksi (bagi dua)
2. Metode Regula Falsi

Penyelesaian Sistem Persamaan Tak Linear

Metode tertutup memerlukan selang [*a*,*b*] yang mengandung akar. Sebagaimana namanya, selang tersebut “mengurung” akar sejati.

Tata-ancang (*strategy*) yang dipakai adalah mengurangi lebar selang secara sistematis sehingga lebar selang tersebut semakin sempit, dan karenanya menuju akar yang benar.

Dalam sebuah selang mungkin terdapat lebih dari satu buah akar atau tidak ada akar sama sekali.

(1) $\boldsymbol{f(a).f(b) < 0}$
maka terdapat akar sebanyak bilangan ganjil

(2) $\boldsymbol{f(a).f(b) > 0}$
maka terdapat akar sebanyak bilangan genap atau tidak ada akar sama sekali

Penyelesaian Sistem Persamaan Tak Linear

Syarat Cukup Keberadaan Akar

Jika $f(a).f(b) < 0$ dan $f(x)$ menerus di dalam selang $[a, b]$, maka paling sedikit terdapat satu buah akar persamaan $f(x) = 0$ di dalam selang $[a, b]$.

Syarat ini disebut syarat cukup, -bukan syarat perlu- sebab meskipun nilai-nilai di ujung selang tidak berbeda tanda, mungkin saja terdapat akar di dalam selang tersebut.

Ada dua masalah yang terjadi karena ketidaktepatan mengambil selang $[a, b]$ yaitu:

1. Bila di dalam selang $[a, b]$ terdapat lebih dari satu buah akar. Sekali suatu metode tertutup digunakan untuk mencari akar di dalam selang $[a, b]$, ia hanya menemukan sebuah akar saja.
2. Bila mengambil selang $[a, b]$ yang tidak memenuhi syarat cukup. Adakalanya kita dapat "kehilangan" akar karena selang $[a, b]$ yang diambil ternyata tidak memenuhi syarat cukup $f(a).f(b) < 0$. Sehingga, kita mungkin sampai pada kesimpulan tidak terdapat akar di dalam selang $[a, b]$ tersebut, padahal seharusnya ada.

Untuk mengatasi kedua masalah di atas, pengguna metode tertutup disarankan mengambil selang yang berukuran cukup kecil yang memuat hanya satu akar.

Penyelesaian Sistem Persamaan Tak Linear

2. Metode Terbuka

- Diperlukan tebakan awal
- x_n dipakai untuk menghitung x_{n+1}
- Hasil dapat konvergen atau divergen

Yang Termasuk Metode Terbuka :

1. Metode Newton-Raphson
2. Metode Secant.
3. Metode Iterasi Titik Tetap

Metode Bagi Dua/Biseksi

Prinsip :

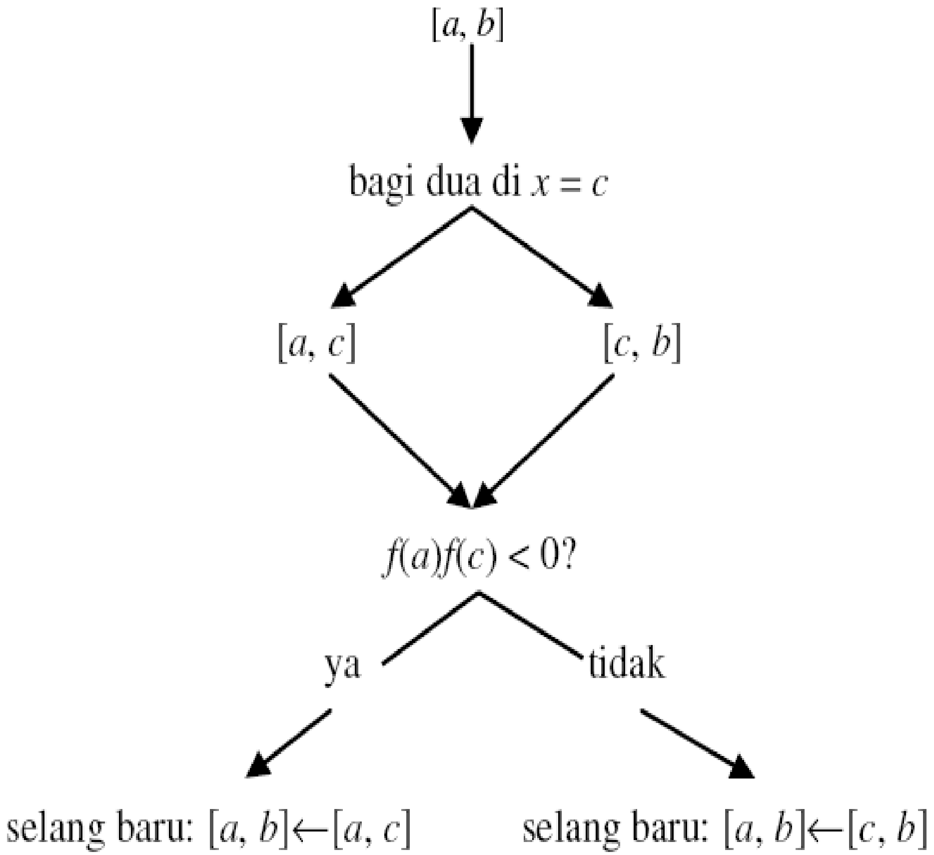
Ide awal metode ini adalah metode tabel, dimana area dibagi menjadi N bagian. Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung akar sedangkan bagian yang tidak mengandung akar dibuang. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.

Metode Bagi Dua/Biseksi

Langkah-langkah penyelesaian :

- Tentukan selang [a,b] sehingga $f(a).f(b) < 0.$
- Hitung nilai tengah c antara a dan b dimana $c = \frac{a+b}{2}$. selanjutnya akan menghasilkan selang baru yaitu [a,c] atau [c,b], dengan ketentuan sbb:
  - Jika f(a) . f(c) < 0 maka selang barunya [a,c]
  - Jika f(c) . f(b) < 0 maka selang barunya [c,b]

Metode Bagi Dua/Biseksi



Metode Bagi Dua/Biseksi

- **Kondisi iterasi berhenti dapat dipilih salah satu dari kriteria berikut :**
  1. *Iterasi berhenti jika lebar selang* $|a-b| < \varepsilon$*, dimana* ε *adalah nilai toleransi lebar selang yang mengurung akar.*
  2. *Iterasi berhenti jika nilai fungsi hampiran* $f(c) = 0$.
  3. *Iterasi berhenti jika* $\left|\frac{c_{baru}-c_{lama}}{c_{baru}}\right| \times 100\% < \delta$*(galat relatif hampiran yang diinginkan).*

- Banyak iterasi dapat diperkirakan dengan rumus :

$$R > \frac{\ln(|b-a|) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

Metode Bagi Dua/Biseksi

Ilustrasi :

Dengan menggunakan metode Biseksi. Tentukan salah satu akar persamaan berikut $x^2 - 6x + 5 = 0$ dengan selang [3,6] dan batas toleransi 0,3 !

Penyelesaian:

Metode Biseksi:
$f(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$

Cek apakah $\boldsymbol{f(a).f(b) < 0}$?
Selang $[3{,}6]$, artinya $a = 3$ dan $b = 6$.
Untuk $a = 3 \rightarrow f(3) = (3)^2 - 6(3) + 5 = -4$
Untuk $a = 6 \rightarrow f(6) = (6)^2 - 6(6) + 5 = 5$
Sehingga diperoleh $f(a).f(b) = f(3).f(6) = (-4).(5) = \mathbf{-20 < 0}$. Karena $f(a).f(b) < 0$ maka terdapat selang $[3{,}6]$ mengandung akar.

Metode Bagi Dua/Biseksi

Perkiraan banyaknya iterasi:

$$R > \frac{\ln(|b-a|) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

$$R > \frac{\ln(|6-3|) - \ln(0{,}3)}{\ln(2)}$$

$$R > \frac{1{,}098 - (-1{,}203)}{0{,}693}$$

$$R > 3{,}32$$

Jadi dibutuhkan minimal 4 kali iterasi ($r = 0$ sampai $r = 3$).

$f(a).f(c) = (-4).(-1.75) = 7 > 0$

$f(c).f(b) = (-1.75).(5) = -8.75 < 0$

Lakukan Iterasi :

Iterasi	a	$c = (a+b)/2$	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	Selang baru	Lebar selang
0	3	4,5	6	-4	$-1{,}75$	5	[c,b]	1,5

Selang baru = $f(a).f(c) < 0$ maka selang barunya [a,c]

$f(c).f(b) < 0$ maka selang barunya [c,b]

Metode Bagi Dua/Biseksi

Lebar Selang = $|b - c| = |6 - 4{,}5| = 1{,}5$

Lakukan pada baris selanjutnya sampai lebar selang lebih kecil dari batas toleransi maka iterasi berhenti.

Buat tabel penolong sebagai berikut :

Iterasi		a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	f(a)	f(c)	f(b)	Selang baru	Lebar selang
0		3	4,5	6	-4	$-1{,}75$	5	[c,b]	1,5
1	a = c	4,5	5,25	6	$-1{,}75$	1,063	5	[a,c]	0,75
2	b = c	4,5	4,875	5,25	-1,75	-0,484	1,063	[c,b]	0,375
3	a = c	4,875	5,063	5,25	$-0{,}484$	0,256	1,063	[a,c]	0,188

Terlihat di dalam tabel penolong iterasi berhenti di baris ke 4 untuk iterasi ke 3 karena 0,188 < 0,3.

Maka **solusi Akar persamaannya adalah x = c = 5,063 dan f(x) = f(c) = 0,256.**

Latihan

1. Tentukan salah satu akar dari persamaan tak linear $f(x) = x^3 - 3x^2 - 0{,}5$ dengan menggunakan Metode Biseksi. Jika diketahui nilai awal $a = 0$ dan $b = 3{,}5$ dan toleransi galat relatif adalah 0.02 serta ketelitian hingga 2 desimal.

TERIMA KASIH