INTERPOLASI POLINOM

Interpolasi

Interpolasi

Mencari nilai suatu fungsi yang tidak diketahui, di antara beberapa nilai fungsi yang diketahui.

Artinya: mencari suatu (x, y) dari suatu f(x), dimana f(x) kita susun dari sekumpulan data (x_i, y_i) yang ada.

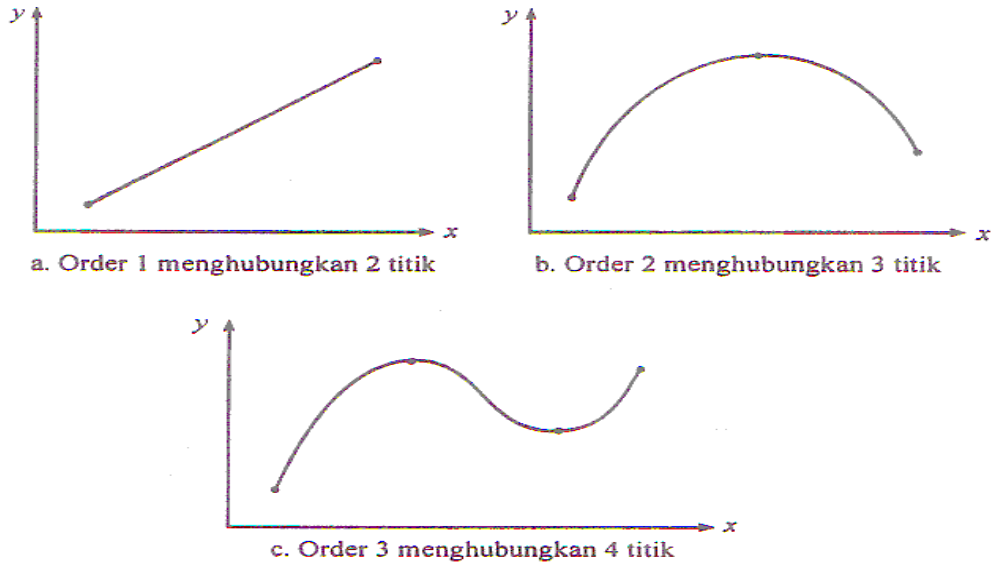
Polinomial

Bentuk Umum Persamaan Polinomial order n :

$$Y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Interpolasi Linear

Bentuk paling sederhana dari interpolasi adalah menghubungkan dua buah titik data dengan garis lurus. Metode ini disebut dengan interpolasi linier yang dapat dijelaskan pada gambar berikut.



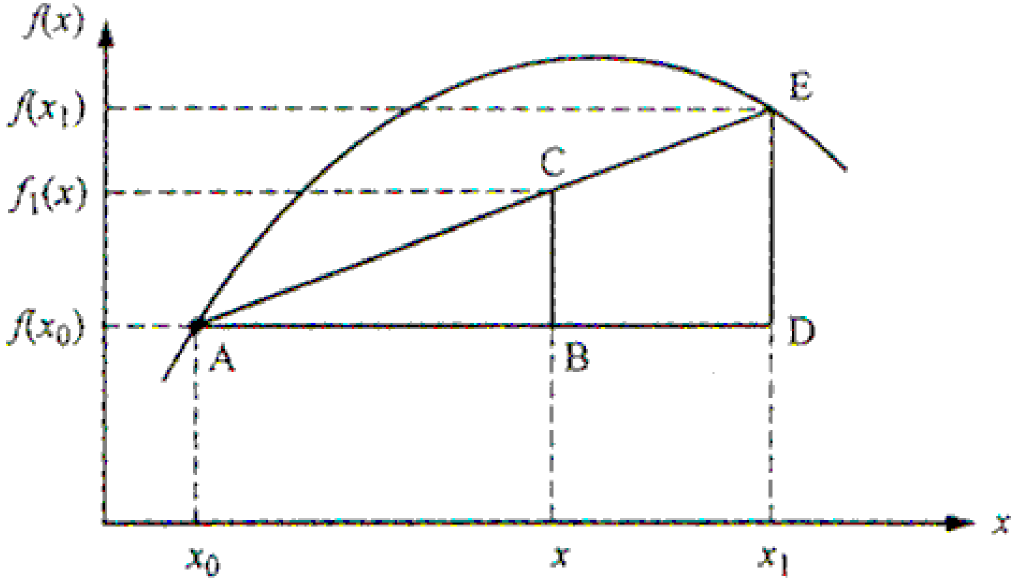
Gambar 1. Interpolasi polinomial

Interpolasi Linear

Pendekatan formulasi interpolasi linier sama dengan persamaan garis lurus.

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Interpolasi Linear



Gambar 2. Interpolasi linier

Interpolasi Linear

Prosentase kesalahan pola interpolasi linier :

$$\varepsilon_t = \left| \frac{nilai\ hasil\ perhitungan - nilai\ sebenarnya}{nilai\ sebenarnya} \right| \times 100\%$$

Interpolasi Linear

Ilustrasi:

Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaraan untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. Data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kendaraan.

Kecepatan (mil/jam)	10	20	30	40	50	60	70
Jarak henti (feet)	12	21	46	65	90	111	148

Perkirakan jarak henti yang dibutuhkan bagi sebuah kenderaan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam.

Interpolasi Linear

maka untuk mencari nilai $x = 45$ maka,

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{90 - 65}{50 - 40}(45 - 40)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{25}{10}(5) = 65 + 12.5 = 77.5 \text{ feet}$$

Interpolasi Linear

Ilustrasi

Taksirlah logaritma natural dari 2 (ln 2) dengan memakai interpolasi linear antara ln 1 = 0 dan ln 6 = 1.7919595, selanjutnya ulangi untuk ln 1 dan ln 4 = 1.3862944 dimana nilai sejati ln 2 = 0.69314718.

Interpolasi Linear

Penyelesaian :

Dik : $x = 2\, maka\, f(x) =$? (nilai sejati ln 2 = 0,69314718

$x_0 = 1\, maka\, f(x_0) = ln1 = 0$

$x_1 = 6\, maka\, f(x_1) = ln6 = 1{,}7919595$

$x_1 = 4\, maka\, f(x_1) = ln4 = 1{,}3862944$ maka

Dengan menggunakan persamaan

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

dihitung dengan interpolasi linier nilai ln pada *x* = 2 berdasar nilai ln di x_0 = 1 dan x_1 = 6.

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.7917595 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.35835190$$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0{,}35835190 - 0{,}69314718}{0{,}69314718}\right| \times 100\% = 0{,}483$$

Interpolasi Linear

Apabila digunakan interval yang lebih kecil, yaitu nilai x_0 = 1 dan x_1 = 4, maka:

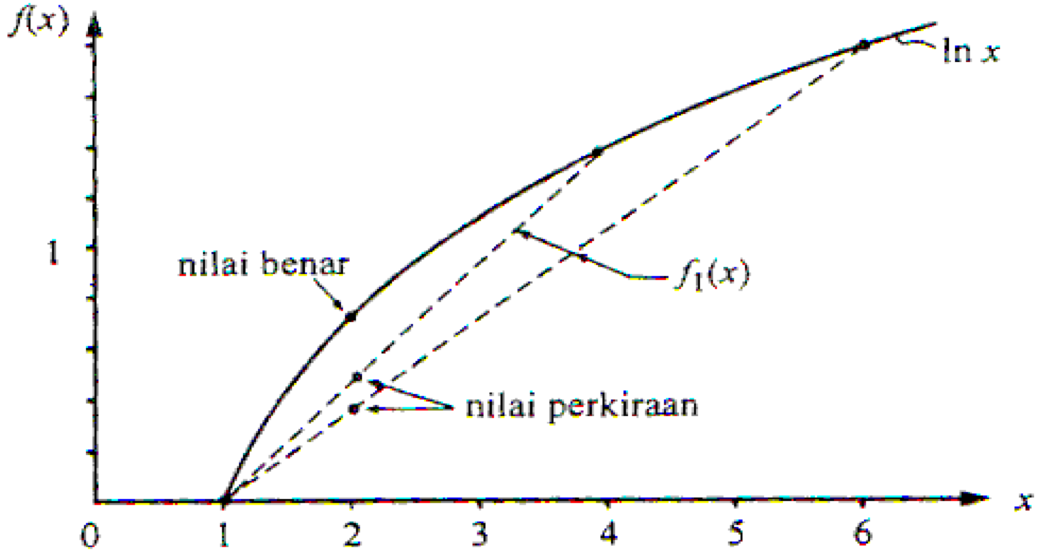
$$f_1(2) = 0 + \frac{1{,}3862944 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0.46209813$$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0{,}46209813 - 0{,}69314718}{0{,}69314718}\right| \times 100\% = 0{,}333$$

Dari contoh nampak bahwa dengan menggunakan interval yang lebih kecil didapat hasil yang lebih baik (kesalahan lebih kecil).

Interpolasi Linear

Gambar dibawah, menunjukkan prosedur hitungan dalam contoh secara grafis.



Gambar 3. Interpolasi linier mencari ln 2

Interpolasi Linear

- Pendekatan interpolasi dengan derajat 1, pada kenyataannya sama dengan mendekati suatu harga tertentu melalui garis lurus.

- Untuk memperbaiki kondisi tersebut dilakukan sebuah interpolasi dengan membuat garis yang menghubungkan titik yaitu melalui orde 2, orde 3, orde 4, dst, yang sering juga disebut interpolasi kuadratik, kubik, dst.

Interpolasi Linear

- Interpolasi orde 2 sering disebut sebagai interpolasi kuadratik, memerlukan 3 titik data.
- Bentuk polinomial orde ini adalah :

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

dengan mengambil:

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2x_0 + b_2x_1$$

$$a_2 = b_2$$

Interpolasi Linear

Koefisien b_0, b_1 dan b_2 didapat dari persamaan :

$b_0 = f(x_0)$ untuk $x = x_0$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Interpolasi Linear

Ilustrasi:

Selesaikan ln 2 memakai polinom orde kedua terhadap tiga titik :
$x_0 = 1 \rightarrow f(x_0) = 0$;
$x_1 = 4 \rightarrow f(x_1) = \ln 4 = 1.3862944$ dan
$x_2 = 6 \rightarrow f(x_2) = \ln 6 = 1.7919595$
dimana nilai sejati ln 2 = 0.69314718.

Penyelesaian :

$b_0 = f(x_0)$ untuk $x = x_0 = 1$, maka $b_0 = \ln 1 = 0$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.3862944 - 0}{4 - 1} = 0.46209813$$

Interpolasi Linear

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{1.7917595 - 1.3862944}{6 - 4} - 0.46209813}{6 - 1} = -0.051873116$$

Hasil diatas selanjutnya disubtitusi ke persamaan :

$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)$

Sehingga didapat :

$f_2(x) = 0 + 0.46209813(2 - 1) - 0.051873116(2 - 1)(2 - 4)$

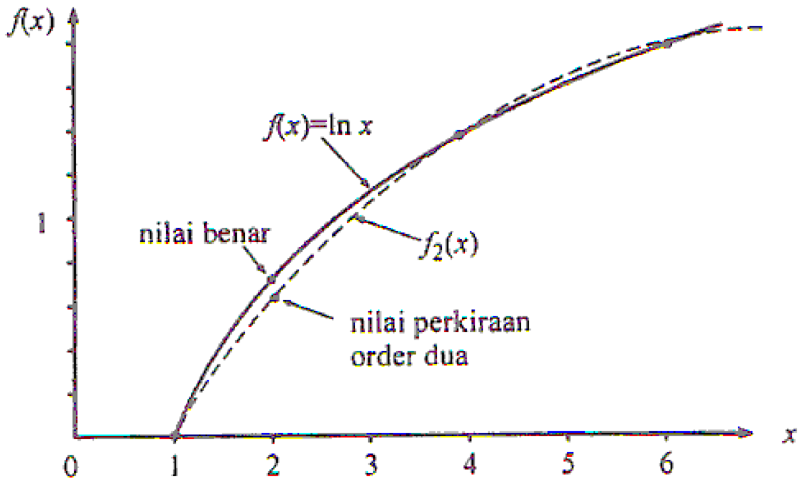
$= 0.56584436$

Besar galat relatif (%) adalah :

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0{,}56584436 - 0{,}69314718}{0{,}69314718}\right| \times 100\% = 0{,}184$$

Interpolasi Linear

Dari contoh tersebut terlihat bahwa dengan menggunakan interpolasi polinomial order 2 didapat hasil yang lebih baik (kesalahan lebih kecil).



Gambar 4. Interpolasi polinomial order 2

Latihan

1. Dengan memakai nilai-nilai dalam tabel di bawah ini, carilah sin 0,26 memakai interpolasi linear dan kuadrat. Berapa angka dibelakang koma yang eksak? (sin 0,26 = 0,25708 eksak sampai 5 angka dibelakang koma).

X	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Sin x	0,00000	0,19867	0,38942	0,56464	0,71736	0,84147

TERIMA KASIH