INTEGRASI NUMERIK

Integrasi Numerik

Integral suatu fungsi adalah operator matematik yang dipresentasikan dalam bentuk:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Dan merupakan integral fungsi f(x) terhadap variabel x, dengan batas-batas integrasi adalah dari $x = a$ sampai $x = b$.

Integrasi Numerik

Dalam integral analitis, persamaan (1) dapat diselesaikan menjadi:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh.

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = 9$$

Integral analitis banyak dipelajari dalam kalkulus. Dalam kesempatan ini, akan dipelajari integral numerik yang merupakan metode pendekatan dari integral analitis.

Integrasi Numerik

Dalam integral analitis, persamaan (1) dapat diselesaikan menjadi:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh.

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = 9$$

Integral analitis banyak dipelajari dalam kalkulus. Dalam kesempatan ini, akan dipelajari integral numerik yang merupakan metode pendekatan dari integral analitis.

Integrasi Numerik

Aturan Trapesium adalah ekuivalen dengan mengaproksimasikan dengan luas trapezium di bawah garis lurus yang menghubungkan f(a) dan f(b).

$$I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Aturan Trapesium (2) bisa diperluas banyak intervalnya yaitu yang disebut dengan aturan trapezium bersegmen ganda.

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad (3)$$

n = banyak interval
h = langkah/panjang interval
a = batasan bawah integral
b = batasan atas integral

Integrasi Numerik

sehingga diformulasikan untuk aturan trapezium bersegmen ganda atau interval banyak sebagai berikut :

$$I = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right) \qquad (4)$$

$$kesalahan(galat) = E_t = hasil\ eksak - I$$

$$kesalahan\ pemotongan = E_a = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}'' \qquad (5)$$

Integrasi Numerik

Ilustrasi :

Hitunglah nilai dari $\int_1^3 2x^4 + 4x^2 dx$ dengan h = 0,5 menggunakan metode trapezium !

Penyelesaian :

h = 0,5, a = 1, b = 3, n = ?

maka

$h = \frac{b-a}{n}$

$0{,}5 = \frac{3-1}{n}$

$n = 4$

Integrasi Numerik

Maka banyak intervalnya adalah 4

$f_0 = 2x^4 + 4x^2 = f(1{,}0) = 2(1{,}0)^4 + 4(1{,}0)^2 = 6$

$f_1 = 2x^4 + 4x^2 = f(1{,}5) = 2(1{,}5)^4 + 4(1{,}5)^2 = 19{,}125$

$f_2 = 2x^4 + 4x^2 = f(2{,}0) = 2(2{,}0)^4 + 4(2{,}0)^2 = 48$

$f_3 = 2x^4 + 4x^2 = f(2{,}5) = 2(2{,}5)^4 + 4(2{,}5)^2 = 103{,}125$

$f_4 = 2x^4 + 4x^2 = f(3) = 2(3)^4 + 4(3)^2 = 198$

Sehingga hasil integral dari $\int_1^3 2x^4 + 4x^2 dx$ dengan $h = 0{,}5$ adalah

$$I = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

$$I = \frac{0{,}5}{2}(6 + 2(19{,}125) + 2(48) + 2(103{,}125) + 198 = 136{,}125$$

Integrasi Numerik

Hitung galat relatifnya (dengan membandingkan dengan hasil integral secara metode analitiknya).

$$galat\ relatif = \left|\frac{131,47 - 136,125}{131,47}\right| . 100\% = 0,035$$

Latihan

1. Hitunglah nilai dari $\int_0^2 -x^3 - x^2 + 5x + 3\, dx$ dengan h = 0,5 menggunakan metode trapezium!

TERIMA KASIH