PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA

Persamaan Differensial Biasa

Persamaan diferensial adalah gabungan antara fungsi yang tidak diketahui secara eksplisit dan turunan (diferensial)-nya. Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua kelompok besar, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

1. **Persamaan diferensial biasa (PDB)** - *Ordinary Differential Equations* (ODE).

PDB adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas.

Peubah bebas biasanya disimbolkan dengan x.

Persamaan Differensial Biasa

Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan diferensial biasa (PDB):

(i) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

(ii) $y' = x^2 + y^2$

(iii) $2\ dy/dx + x^2y - y = 0$

(iv) $y'' + y'\cos x - 3y = \sin 2x$

(v) $2y''' - 23y' = 1 - y''$

Peubah bebas untuk contoh (i) sampai (v) adalah x, sedangkan peubah terikatnya adalah y, yang merupakan fungsi dari x, atau ditulis sebagai $y = g(x)$. ■

Persamaan Differensial Biasa

Berdasarkan turunan tertinggi yang terdapat di dalam persamaannya, PDB dapat lagi dikelompokkan menurut ordenya, yaitu:

1. PDB orde 1, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan pertama. Contoh (i), (ii), dan (iii) di atas adalah PDB orde 1.
2. PDB orde 2, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan kedua. Contoh (iv) adalah PDB orde dua.
3. PDB orde 3, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan ketiga. Contoh (v) di atas adalah PDB orde tiga. dan seterusnya untuk PDB dengan orde yang lebih tinggi. PDB orde 2 ke atas dinamakan juga PDB orde lanjut.

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP) - *Partial Differential Equations* (PDE). PDP adalah persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas. Turunan fungsi terhadap setiap peubah bebas dilakukan secara parsial.

Persamaan Differensial Biasa

Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan diferensial parsial (PDP):

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y}$$ (yang dalam hal ini, $u = g(x,y)$)

(ii) $$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\sin(x+t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ (yang dalam hal ini, $u = g(x, y, t)$)

■

Peubah bebas untuk contoh (i) adalah x dan y, sedangkan peubah terikatnya adalah u, yang merupakan fungsi dari x dan y, atau ditulis sebagai $u = g(x,y)$. Sedangkan peubah bebas untuk contoh (ii) adalah x, y, dan t, sedangkan peubah terikatnya adalah u, yang merupakan fungsi dari x, y, dan t, atau ditulis sebagai $u = g(x, y, t)$.

Persamaan Differensial Biasa

Bentuk baku PDB orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y$

Catatan: Kadang-kadang *y*' ditulis sebagai *dy*/*dx*. Jadi, *y*' = *dy*/*dx*.

PDB orde satu yang tidak mengikuti bentuk baku tersebut harus ditulis ulang menjadi bentuk persamaan (1), agar ia dapat diselesaikan secara numerik.

Persamaan Differensial Biasa

Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan diferensial biasa dan transformasinya ke dalam bentuk baku PDB orde 1:

(i) $2y' + xy = 100; \quad y(0) = 1$

Bentuk baku: $y' = (100 - xy)/2 \; ; \; y(0) = 1$

(ii) $-xy' + 2y/x = y' - y \quad ; \quad y(1) = -1$

Bentuk baku: $y' = \dfrac{2y/x + y}{1 + x} \; ; \; y(1) = -1$

Penyelesaian PDB secara numerik berarti menghitung nilai fungsi di $x_{r+1} = x_r + h$, dengan *h* adalah *ukuran langkah* (*step*) setiap lelaran. Pada metode analitik, nilai awal berfungsi untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik nilai awal (*initial value*) pada persamaan (1) berfungsi untuk memulai lelaran.

Persamaan Differensial Biasa

Terdapat beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi PDB, mulai dari metode yang paling dasar sampai dengan metode yang lebih teliti, yaitu

1. Metode Euler

2. Metode Heun

3. Metode Deret Taylor

4. Metode Runge-Kutta

5. Metode *predictor-corrector*

Metode Euler

Diberikan PDB orde satu,

$y' = dy/dx = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0) = y_0$

Misalkan

$$y_r = y(x_r)$$

adalah hampiran nilai y di x_r yang dihitung dengan metode Euler. Dalam hal ini $x_r = x_0 + rh$, $r = 0,1,2, \ldots n$.

Sehingga bentuk metode euler sebagai berikut:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r)$$

Metode Euler

Ilustrasi

Diketahui PDB

$$dy/dx = x + y \; dan \; y(0) = 1$$

Gunakan metode Euler untuk menghitung $y(0{,}10)$ dengan ukuran langkah h = 0.05 dan h = 0.02. Diketahui solusi sejati PDB tersebut adalah $y(x) = e^x - x - 1$.

Metode Euler

Penyelesaian:

(i) Diketahui

$$a = x_0 = 0$$
$$b = 0.10$$
$$h = 0.05$$

Dalam hal ini, $f(x, y) = x + y$, dan penerapan metode Euler pada PDB tersebut menjadi

$$y_{r+1} = y_r + 0.02(x_r + y_r)$$

Langkah-langkah:

$$x_0 = 0 \quad \rightarrow \; y_0 = 1$$
$$x_1 = 0.05 \; \rightarrow \; y_1 = y_0 + 0.05(x_0 + y_0) = 1 + (0.05)(0 + 1) = 1.0050$$
$$x_2 = 0.10 \; \rightarrow y_2 = y_1 + 0.05(x_1 + y_1) = 1.0050 + (0.05)(0.05 + 1.0050) = 1.05775$$

Jadi, $y(0.10) \approx 1.05775$.

(Bandingkan dengan nilai solusi sejatinya,

$$y(0.10) = e^{0.10} - 0.01 - 1 = 1.1103$$

Metode Euler

sehingga galatnya adalah

$$\text{galat} = 1.1103 - 1.05775 = 0.05255 \quad)$$

(ii) Diketahui

$$a = x_0 = 0$$
$$b = 0.10$$
$$h = 0.02$$

Dalam hal ini, $f(x, y) = x + y$, dan penerapan metode Euler pada PDB tersebut menjadi

$$y_{r+1} = y_r + 0.02(x_r + y_r)$$

Langkah-langkah:

Metode Euler

$$x_0 = 0 \quad \rightarrow \; y_0 = 1$$
$$x_1 = 0.02 \rightarrow \; y_1 = y_0 + 0.02(x_0 + y_0) = 1 + (0.02)(0 + 1) = 1.0200$$
$$x_2 = 0.04 \quad \rightarrow \; y_2 = y_1 + 0.02(x_1 + y_1) = 1.0200 + (0.02)(0.02 + 1.0200) = 1.0408$$
$$x_3 = 0.06 \; \rightarrow \; y_3 = 1.0624$$
$$x_4 = 0.08 \; \rightarrow \; y_4 = 1.0848$$
$$x_5 = 0.10 \; \rightarrow \; y_5 = 1.1081$$

Jadi, $y\,(0{,}10) \approx 1.1081$

(Bandingkan dengan solusi sejatinya, $y\,(0.10) = 1.1103$, sehingga galatnya adalah

galat $= 1.1103 - 1.1081 = 1.1081$)

Latihan

1. Diketahui PDB

$$dy/dx = ½\,x - ½\,y\,;\ y(0) = 1$$

Tentukan $y(0.50)$ dengan metode euler($h = 0.25$)

TERIMA KASIH