METODE RUNGE KUTTA

Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode PDB yang paling popuper karena banyak dipakai dalam praktek.

Metode Runge Kutta

Bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde n sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots . + a_n k_n \qquad (1)$$

Dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah tetapan, dan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$
$$\vdots$$
$$k_n = hf(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-2,2} k_2 + \cdots + q_{n-1,n} k_{n-1})$$

Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta dapat dibagi menjadi beberapa metode Runge-Kutta yaitu

- Metode Runge-Kutta orde Satu
- Metode Runge-Kutta orde dua
- Metode Runge-Kutta orde tiga
- Metode Runge-Kutta orde Lebih tinggi

Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta yaitu Runge-Kutta orde tiga, formulasi adalah sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \qquad (2)$$

Dengan:

$$k_1 = hf(x_{i,}y_i) \qquad (3)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h\ ;\ y_i + \frac{1}{2}k_1) \qquad (4)$$

$$k_3 = hf(x_i + h\ ;\ y_i - k_1 + 2k_2) \qquad (5)$$

Metode Runge Kutta

Ilustrasi:

Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan metode Runge-kutta orde tiga

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

Dengan kondisi awal x = 0 adalah y(0) = 1

dari x = 0 dan x = 1 dengan panjang langkah $\mathrm{h} = 0{,}5$

Penyelesaian

Diketahui:

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$h = 0{,}5$$

Maka $n = \frac{1-0}{0{,}5} = 2$ (Jumlah langkah)

Metode Runge Kutta

Untuk $x_0 \;=\; 0$ dan y_0 (0) = 1

Untuk $x_1 = 0{,}5\ dan\ y_1(0{,}5) =?$

Mencari k_1, k_2, k_3 sebagai berikut

$$k_1 = 0{,}5(-2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8{,}5) = 4{,}25$$

$$k_2 = 0{,}5(-2(0{,}25)^3 + 12(0{,}25)^2 - 20(0{,}25) + 8{,}5) = 2{,}11$$

$$k_3 = -2(0{,}5)^3 + 12(0{,}5)^2 - 20(0{,}5) + 8{,}5 = 1{,}25$$

Subsitusikan ke persamaan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2, k_3)$$

$$y(0{,}5) = y_1 = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$y(0{,}5) = y_1 = 1 + \frac{1}{6}(4{,}25 + 4(2{,}11) + 1{,}25) = 3{,}323$$

Metode Runge Kutta

Untuk $x_2 \;=\; 1{,}0$ dan $y_2(1{,}0)$ = ?

Mencari k_1, k_2, k_3 sebagai berikut

$$k_1 = -2(1)^3 + 12(1)^2 - 20(1) + 8{,}5 = -1{,}5$$

$$k_2 = -2(1{,}25)^3 + 12(1{,}25)^2 - 20(1{,}25) + 8{,}5 = -5{,}40$$

$$k_3 = -2(1{,}5)^3 + 12(1{,}5)^2 - 20(1{,}5) + 8{,}5 = -10{,}25$$

Subsitusikan ke persamaan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2, k_3)$$

$$y(1{,}0) = y_2 = y(1) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$y(1{,}0) = y_2 = 3{,}323 + \frac{1}{6}(-1{,}5 + 4(-5{,}40) - 10{,}25) = -2{,}235$$

Metode Runge Kutta

1. Selesaikanlah persamaan di bawah ini :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -x^3 - x^2 + 5x + 3$$

y(0) = 1 dari x = 0 dan x = 2 dengan panjang langkah $\Delta x = 0{,}5$ Selesaikanlah dengan menggunakan metode Runge-Kutta!

TERIMA KASIH