Pengujian Hipotesis Selisih Rata-Rata, Selisih Proporsi dan Selisih Varians

Uji Hipotesis Selisih Rata-rata

Pengujian hipotesis selisih rata-rata digunakan ketika terdapat dua buah rata-rata hitung. Pengujian ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah:

1. Beberapa populasi mempunyai rata-rata yang sama ataukah berbeda?
2. Beberapa buah sampel berasal dari sebuah populasi yang sama ataukah berlainan?

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Selisih Rata-rata

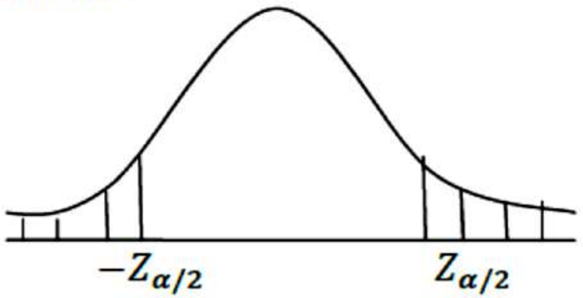
Perumusan Hipotesis:

- Uji 2 Pihak

  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

  $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

  Kurva :



  Kriteria :

  $-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$ → H_0 tidak dapat ditolak

  $Z < -Z_{\alpha/2}$ atau $Z > Z_{\alpha/2}$ → H_0 ditolak

  n > 30 dimana $Z_{\alpha/2} = \frac{1-\alpha}{2}$ dengan df = n1 + n2 – 2

  n ≤30 dimana Dimana $t_{\alpha/2} = \frac{\alpha}{2}$ dengan df = n1 + n2 – 2

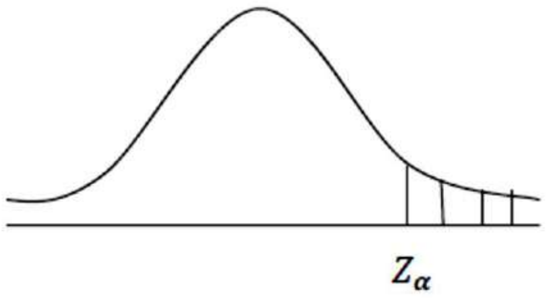
Langkah-Langkah Uji Hipotesis Selisih Rata-rata

- Uji Pihak Kanan

$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$

$H_A : \mu_1 > \mu_2$

Kurva :



Kriteria :

$Z \leq Z_\alpha \rightarrow H_0$ tidak dapat ditolak

$Z > Z_\alpha \rightarrow H_0$ ditolak

n > 30 dimana $Z_\alpha = 0.5 - \alpha$ dengan df = n1 + n2 – 2

n ≤ 30 dimana Dimana $t_\alpha = \alpha$ dengan df = n1 + n2 – 2

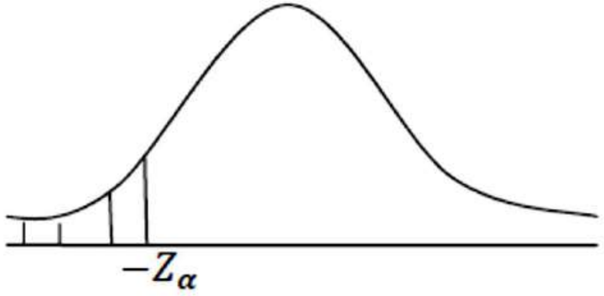
Langkah-Langkah Uji Hipotesis Selisih Rata-rata

- Uji Pihak Kiri

  $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$

  $H_A : \mu_1 < \mu_2$

  Kurva :

  Kriteria :

  $Z \geq -Z_\alpha \rightarrow H_0$ tidak dapat ditolak

  $Z < -Z_\alpha \rightarrow H_0$ ditolak

  n > 30 dimana $Z_\alpha = 0.5 - \alpha$ dengan df = n1 + n2 – 2

  n ≤ 30 dimana Dimana $t_\alpha = \alpha$ dengan df = n1 + n2 – 2

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Selisih Rata-rata

Keterangan:

- Untuk sampel kecil ubah Z menjadi t
- Untuk proporsi ubah μ menjadi π

Rumus:

- n>30 (sampel besar)

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$$

Jika $\sigma_1{}^2$ dan $\sigma_2{}^2$ tidak diketahui nilainya, maka:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1{}^2}{n_1} + \frac{s_2{}^2}{n_2}}}$$

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Selisih Rata-rata

- $n \leq 30$ (sampel kecil)

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Jika σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui nilainya, tetapi diketahui bahwa $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ maka :

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Jika σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui nilainya, tetapi diketahui bahwa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ maka :

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Ilustrasi 1

Seorang peneliti ingin membuktikan kualitas tepung terigu A lebih bagus daripada tepung terigu B. Diambil 12 orang konsumen tepung terigu A dan 10 orang konsumen tepung terigu B. Konsumen tepung terigu A memberi nilai rata-rata 80 dengan simpangan baku 4 and konsumen tepung terigu B memberi nilai rata-rata 75 dengan simpangan baku 4,5. Ujilah hipotesis kedua kualitas tepung terigu tersebut, dengan alternative kualitas tepung terigu A lebih baik dari kualitas tepung terigu B! Gunakan taraf nyata 5%!

Solusi

Diketahui :

$n_1 = 12$ $\bar{x}_1 = 80$ $s_1 = 4$

$n_2 = 10$ $\bar{x}_2 = 75$ $s_2 = 4{,}5$

Ditanya: $\mu_1 > \mu_2$

Pengujian Hipotesa

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_A : \mu_1 > \mu_2$$

$$S = \sqrt{\frac{(n_1-1)(s_1^2) + (n_2-1)(s_2^2)}{(n_1+n_2)-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12-1)(4^2) + (10-1)(4{,}5^2)}{(12+10)-2}}$$

$$= 4{,}232316151$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$= \frac{(80-75)-0}{4{,}232316151\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}}$$

$$= 2{,}759123786 \approx 2{,}76$$

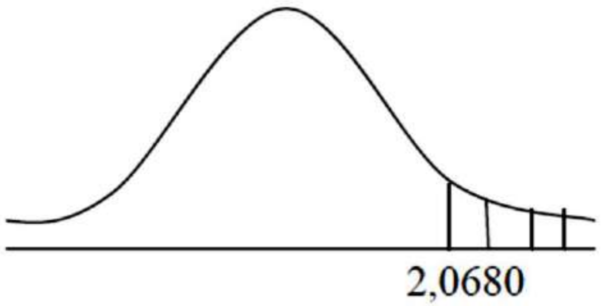
Solusi

df = $(n_1 + n_2) - 2$

= (12 + 10) -2 = 20

$\alpha = 0{,}05$

$t_\alpha = 2{,}0680$



Kriteria :

t > t_α ; H_0 ditolak

t ≤ t_α ; H_0 tidak dapat ditolak

Ternyata : 2,76 > 2,0680 atau t > t_α ; H_0 ditolak

Kesimpulan : Dengan tigkat signifikansi 5% dapat kita simpulkan bahwa kualitas tepung terigu A lebih baik dibandingkan kualitas tepung terigu B.

Uji Hipotesis Selisih Proporsi

Pengujian hipotesis selisih proporsi digunakan ketika terdapat dua buah perbandingan. Pengujian ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah ada perbedaan presentase yang menyolok ataukah tidak antara dua kelompok yang sedang dipelajari.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Selisih Proporsi

Rumus:

- n>30 (sampel besar)

$$Z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$$

Jika π_1 dan π_2 tidak diketahui, maka:

$$Z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)}{\sqrt{\pi(1-\pi)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

dimana, $\pi = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

atau dapat juga digunakan rumus:

$$Z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\frac{x_1}{n_1}\left(1 - \frac{x_1}{n_1}\right)}{n_1} + \frac{\frac{x_2}{n_2}\left(1 - \frac{x_2}{n_2}\right)}{n_2}}}$$

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Selisih Proporsi

- n≤30 (sampel kecil)

$$t = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$$

Jika π_1 dan π_2 tidak diketahui, maka:

$$t = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)}{\sqrt{\pi(1-\pi)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

dimana, $\pi = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

atau dapat juga digunakan rumus:

$$t = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\frac{x_1}{n_1}\left(1 - \frac{x_1}{n_1}\right)}{n_1} + \frac{\frac{x_2}{n_2}\left(1 - \frac{x_2}{n_2}\right)}{n_2}}}$$

Ilustrasi 2

Seorang ahli fermentasi mengadakan percobaan pada dua macam obat fermentasi dan menyatakan bahwa perubahan obat pertama dan kedua pada gelas susu adalah sama. Obat pertama diberikan pada 100 gelas susu dan ternyata 60 gelas susu menunjukkan perubahan. Obat kedua diberikan pada 150 gelas susu yang lain dan ternyata 85 gelas susu berubah. Ujilah dengan taraf nyata 5%!

Solusi

Dik: $x_1 = 60$ $x_2 = 85$

$n_1 = 100$ $n_2 = 150$

Dit: $\pi_1 = \pi_2$

$H_0 : \pi_1 = \pi_2$

$H_A : \pi_1 \neq \pi_2$

$$\pi = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$$\pi = \frac{60 + 85}{100 + 150} = 0.58$$

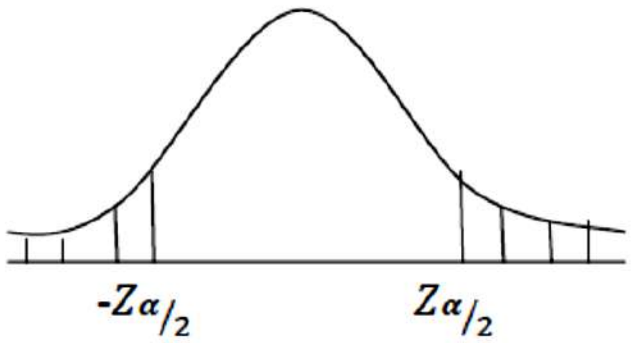
$$Z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)}{\sqrt{\pi(1-\pi)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$Z = \frac{\left(\frac{60}{100} - \frac{85}{150}\right)}{\sqrt{0.58(1-0.58)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{15ZZ0}\right)}} = 0.52419410927 \approx 0.5241$$

$\alpha = 0.05$

$Z_{\alpha/2} = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0.05}{2} \rightarrow$ $Z_\alpha = 1.96$

Solusi



Kriteria :

$-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2} \rightarrow H_0$ tidak dapat ditolak

$Z < -Z_{\alpha/2}$ atau $Z > Z_{\alpha/2} \rightarrow H_0$ ditolak

Ternyata:

$-1.96 \leq 0.5241 \leq 1.96 \rightarrow H_0$ tidak dapat ditolak

Kesimpulan: Jadi, dengan taraf nyata 5% dapat disimpulkan bahwa pernyataan perubahan obat pertama dan kedua pada gelas susu adalah sama dapat diterima, karena tidak terdapat perbedaan yang signifikan.

Uji Hipotesis Selisih Varians

Menguji kesamaan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 dari dua populasi

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 ; \sigma_1^2 > \sigma_2^2 ; atau\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Menggunakan Uji F

– Syarat:
  - Kedua populasi **independent** dan **berdistribusi normal**
  - Sample yang digunakan **independent** dan **random**

Uji Hipotesis Selisih Varians

Uji Statistik F :

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

s_1^2 = Variansi populasi 1

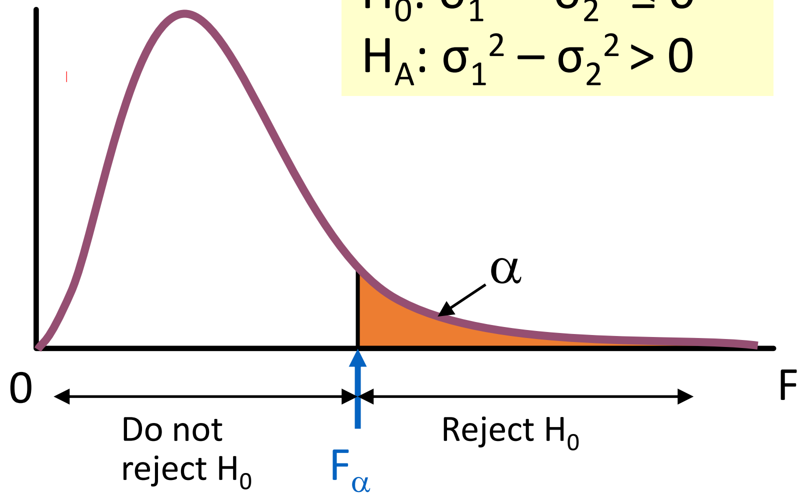
n_1 - 1 = pembilang derajat kebebasan

S_2^2 = Variansi populasi 2

n_2 - 1 = penyebut derajat kebebasan

Uji Hipotesis Selisih Varians

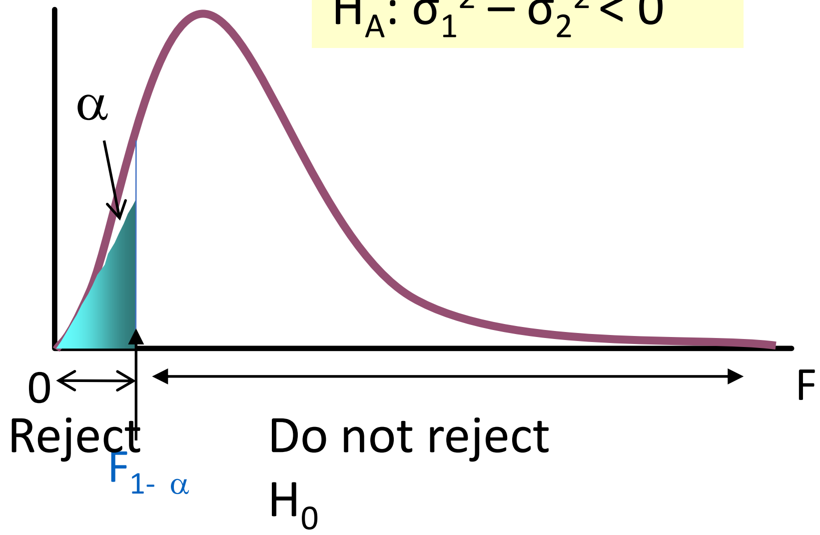
$H_0: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \leq 0$
$H_A: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 > 0$



- Penerimaan Hipotesis

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha,(v1,v2)}$$

$H_0: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \geq 0$
$H_A: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 < 0$

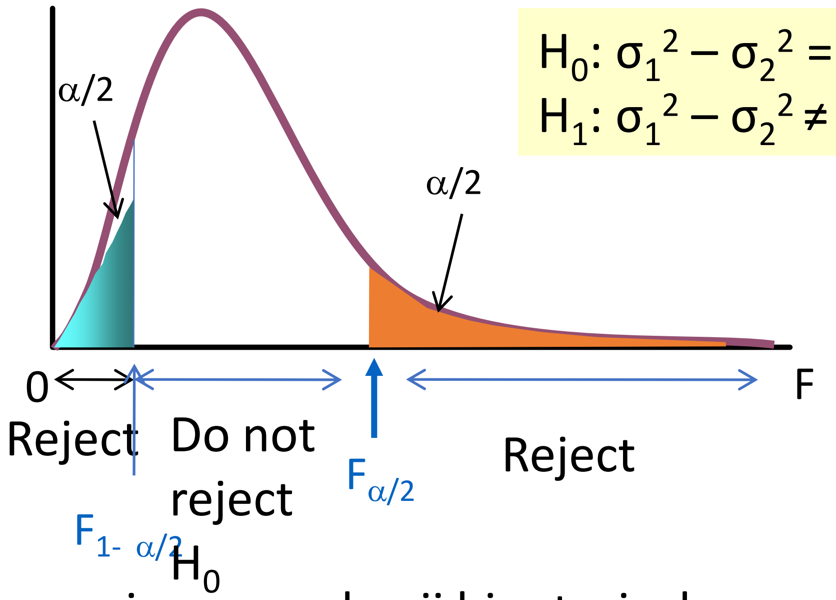


- penerimaan Hipotesis

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha,(v1,v2)}$$

Uji Hipotesis Selisih Varians

$H_0: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0$
$H_1: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \neq 0$



- penerimaan pada uji hipotesis dua pihak

$$F = F_{1-\alpha/2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \; atau$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha/2}$$

Ilustrasi 3

Ada dua pabrik penghasil kapur, NICE dan NASDAQ bandingkan apakah variansi panjang kapur dari kedua pabrik sama, sebagai mana pengujian sebelum nya , Berikut data yang didapatkan:

	NICE	**NASDAQ**
Jumlah	**21**	**25**
Rata-Rata	**3.27**	**2.53**
Std dev	**1.30**	**1.16**

Apakah ada perbedaan variansi antara NICE dan NASDAQ pada $\alpha = 0.1$ level?

Solusi

Uji hipotesis:

H_0: $\sigma^2_1 - \sigma^2_2 = 0$ (tidak ada perbedaan di antara variansi)
H_1: $\sigma^2_1 - \sigma^2_2 \neq 0$ (ada perbedaan di variansi)

- Mencari nilai kritik distribusi F $\alpha = 0.1$:
  - Pembilang:
    - $df_1 = n_1 - 1 = 21 - 1 = 20$
  - Penyebut:
    - $df_2 = n_2 - 1 = 25 - 1 = 24$

$$F_{0.05,\ 20,\ 24} = 2.03$$

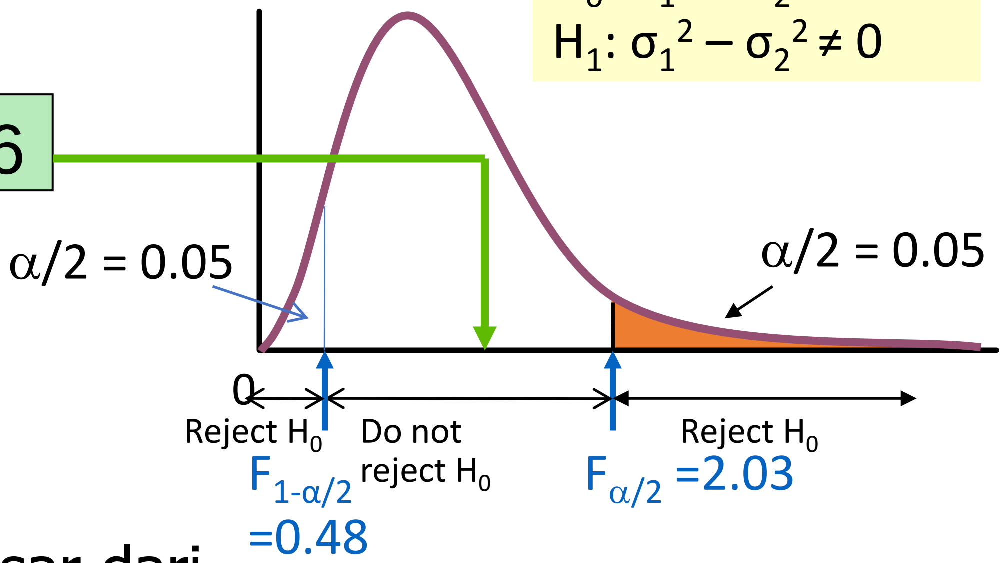
$$F_{0.95,\ 20,\ 24} = 0.48$$

Solusi

- Statistik Uji:

$H_0: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0$
$H_1: \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \neq 0$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1.30^2}{1.16^2} = \boxed{1.256}$$



- F = 1.256 tidak lebih besar dari daerah kritis 2.03 atau lebih kecil dari nilai kritis F 0.48, sehingga H_0 diterima.

- **Kesimpulan:** Bahwa hipotesis awal dapat di terima dengan α = .05

Rumus Matlab

Uji dua rata-rata

```
[h,p] = ttest2(x,y)
```

```
[h,p, ci, stats] = ttest2(x,y,alpha,tail)
```

$$h = \begin{cases} 1, & tolak\ H_0\ pada\ \alpha = 5\% \\ 0, & terima\ H_1\ pada\ \alpha = 5\% \end{cases}$$

p adalah probabilitas tingkat signifikansi

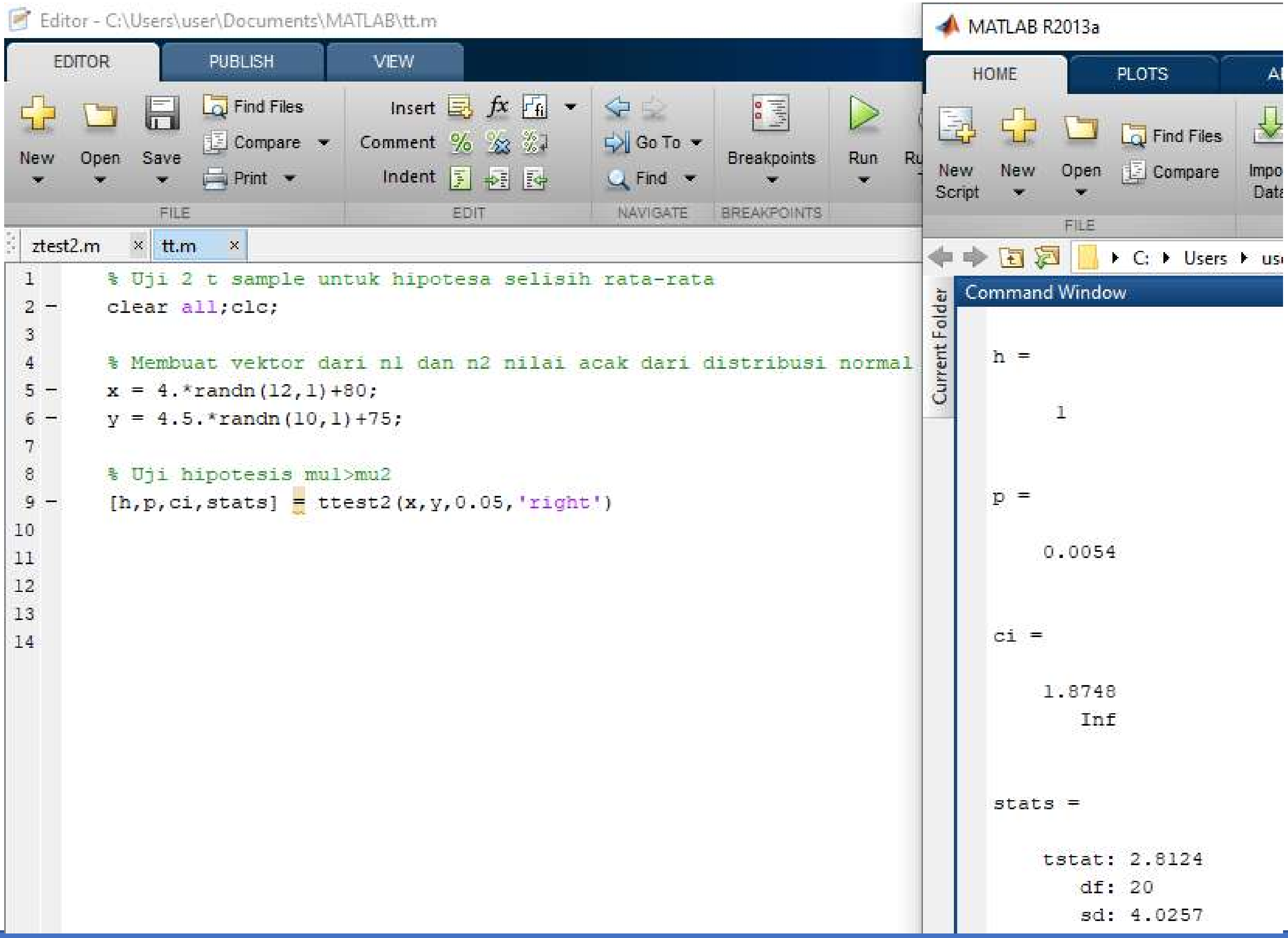
Uji dua varians

```
[h,p] = vartest2(x,y)
```

```
[h,p] = vartest2(x,y,alpha,tail)
```

Perhitungan dengan Matlab

Soal kasus pada Ilustrasi 1



TERIMA KASIH